

دفترچه شماره ۱

آزمون شماره ۱۷

جمعه ۱۴۰۱/۱۲/۰۵



# آزمون‌های سرانسر گاج

گزینه درسته را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

## سوالات آزمون

### پایه دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۵۰	مدت پاسخگویی: ۷۵ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

مدت پاسخگویی	شماره سؤال		وضعیت پاسخگویی	تعداد سؤال	مواد امتحانی	ردیف
	تا	از				
۷۵ دقیقه	۱۰	۱	اجباری	۱۰	حسابان ۲	۱
	۲۰	۱۱		۱۰	ریاضیات گسسته	
	۳۰	۲۱		۱۰	هندسه ۳	
	۳۵	۳۱		۵	حسابان ۱	
	۴۵	۳۶		۱۰	هندسه ۲	
	۵۰	۴۶		۵	آمار و احتمال	



## حسابان (۲)

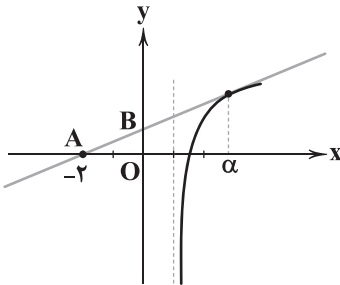
۱- اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h-2) - f(-2h-2)}{h^2 - 5h} = 8$  مقدار  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(-2) - f(x)}{\sqrt{3-3x} - 3}$  کدام است؟

- ۱)  $-10$       ۲)  $10$       ۳)  $-20$       ۴)  $20$

۲- اگر خط  $y = 2x - 3$  در نقطه‌ای به طول  $x = 1$  بر منحنی  $f(x)$  مماس باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - f(1)}{x^3 - 1}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{3}$       ۲)  $3$       ۳)  $-\frac{1}{3}$       ۴)  $-3$

۳- بخشی از نمودار تابع  $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$  و خط مماس بر آن در شکل زیر رسم شده است. مساحت مثلث OAB کدام است؟



۱)  $\frac{2}{9}(4 + \sqrt{7})$

۲)  $\frac{2}{9}(4 - \sqrt{7})$

۳)  $\frac{4}{9}(4 + \sqrt{7})$

۴)  $\frac{4}{9}(4 - \sqrt{7})$

۴- اگر  $f(x) = (x^3 - 1)[-2x]$  باشد، در مورد مقادیر  $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h^2) - f(2)}{-h^2}$  و  $B = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h^2) - f(2)}{h^2}$  کدام گزینه صحیح است؟

۱)  $A = 60$  و  $B = 48$       ۲)  $A$  و  $B$  موجود نیست.

۳)  $A = 60$  و  $B$  موجود نیست.      ۴)  $A$  و  $B$  موجود نیستند.

۵- اگر نیم مماس‌های چپ و راست بر تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} & x \geq 2 \\ ax^3 + \frac{b}{x-3} & x < 2 \end{cases}$  در نقطه  $x = 2$  بر هم عمود باشند، حاصل  $8a + b$  کدام است؟

- ۱)  $-19$       ۲)  $-20$       ۳)  $-21$       ۴)  $-22$

۶- اگر مماس بر منحنی تابع  $f(x) = \frac{\sin 2x \sqrt{9x^2 - x + 8}}{\cos^2 3x \sqrt{x^2 + x + 1}}$  در نقطه  $x = 0$  واقع بر منحنی  $f(x)$  بر تابع  $g(x) = \frac{2x-a}{x+3}$  مماس باشد، مقدار  $a$

کدام است؟

- ۱)  $\frac{9}{4}$       ۲)  $-\frac{9}{4}$       ۳)  $\frac{5}{2}$       ۴)  $-\frac{5}{2}$

محل انجام محاسبات



۷- اگر  $f(x) = \sqrt[3]{2x^3 - 3\sin^2 3x}$  و  $g(x) = \sqrt[3]{3x^3 - 3\cos^2 3x}$ ، حاصل  $f'(1)g'(1) + 2g'(1)f'(1) + 2f'(1)g'(1)$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۸- باقی مانده و خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای  $f(x)$  بر  $2x^2 + 6x$  به ترتیب برابر  $4x+1$  و  $Q(x)$  است و باقی مانده تقسیم  $Q(-x+2)$

بر  $x-5$  برابر ۶ می‌باشد، باقی مانده تقسیم  $f'(x)$  بر  $x+3$  کدام است؟

- (۱) -۱۶ (۲) ۱۶ (۳) -۳۲ (۴) ۳۲

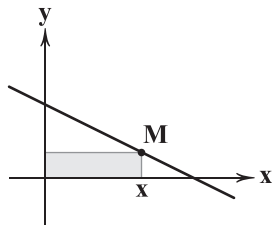
۹- اگر دو تابع  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x-1}} + b$  و  $g(x) = \frac{a(\tan \pi x - \tan^2 \pi x)}{(1 + \tan^2 \pi x)^2}$  در نقطه‌ای به طول  $x=8$  مماس مشترک داشته باشند،  $\frac{b}{a}$

کدام است؟

- (۱)  $-24\pi$  (۲)  $-18\pi$  (۳)  $-12\pi$  (۴)  $-6\pi$

۱۰- نقطه  $M$  روی خط  $y = 2 - \frac{x}{4}$  مطابق شکل زیر در ناحیه اول قرار گرفته است. اگر مساحت مستطیل را به صورت تابعی از طول نقطه  $M$  بنویسیم،

اختلاف آهنگ متوسط تغییر مساحت مستطیل در بازه  $[0, 2]$  و آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت وقتی طول نقطه  $M$  برابر ۳ باشد، کدام است؟



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

### گزینه

۱۱- تعداد حالاتی که دهمین پرتاب سکه، چهارمین باری باشد که سکه «رو» می‌آید، کدام است؟

- (۱) ۸۴ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۶۰ (۴) ۲۱۰

۱۲- با اعداد «۱، ۱، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۳، ۳» چند عدد ۳ رقمی می‌توان نوشت؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۱ (۳) ۲۴ (۴) ۲۷

۱۳- از بین ۶ زوج می‌خواهیم ۷ نفر را انتخاب کنیم، به طوری که دقیقاً ۲ زوج بین آن‌ها قرار داشته باشد. به چند طریق می‌توانیم این کار را

انجام دهیم؟

- (۱) ۳۲۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۴۸۰ (۴) ۵۴۰

۱۴- با ارقام «۰، ۰، ۰، ۱، ۱، ۱، ۲، ۳» چند عدد ۷ رقمی می‌توان ساخت؟

- (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۰۰ (۴) ۳۶۰

محل انجام محاسبات



۱۵- چند مثلث می‌توان رسم کرد که ۳ رأس آن روی نقاط مشخص شده باشد؟

- • • •
- • • •
- • • •

(۱) ۲۲۰

(۲) ۲۰۸

(۳) ۲۰۴

(۴) ۲۰۰

۱۶- معادله  $(x_1 + x_2)^2 + x_3 + x_4 = 17$  چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

(۴) ۳۳

(۳) ۲۶

(۲) ۱۹

(۱) ۱۲

۱۷- در بسط  $(a+b+c+d)^6$  چند جمله وجود دارد که فاقد  $a$  باشد و توان  $b$  حداقل برابر ۲ باشد؟

(۴) ۳۶

(۳) ۲۸

(۲) ۲۱

(۱) ۱۵

۱۸- تعداد جواب‌های صحیح و مثبت  $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4} = 10$  با فرض  $x_1 > 10$  کدام است؟

(۴) ۲۸

(۳) ۲۴

(۲) ۲۰

(۱) ۱۶

۱۹- تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله  $x+y+z < 7$  کدام است؟

(۴) ۱۶۵

(۳) ۱۲۰

(۲) ۵۶

(۱) ۸۴

۲۰- یک رستوران ۴ نوع غذا دارد. یک فرد به چند طریق می‌تواند ۷ غذا بخورد؟ (این فرد می‌تواند از هر نوع غذا هر چندتا بخواهد، خرید کند.)

(۴) ۱۲۵

(۳) ۱۲۰

(۲) ۱۰۸

(۱) ۹۶

### هندسه (۳)

۲۱- یک شعاع نورانی در امتداد خط  $y = -2$  بر سهمی به معادله  $y^2 = 4x$  می‌تابد، معادله خط انعکاس کدام است؟

(۴)  $y = x - 1$ (۳)  $y = x + 1$ (۲)  $x = 2$ (۱)  $x = 1$ 

۲۲- مساحت محدود به ناحیه  $S = \{(x, y) | y^2 \leq 4 - (x-2)^2, x \leq 2, y > 0\}$  چقدر است؟

(۴)  $2\pi$ (۳)  $\pi$ (۲)  $\frac{\pi}{2}$ (۱)  $\frac{\pi}{4}$ 

۲۳- به ازای کدام مقدار  $m$  فاصله نقطه  $(-3, 2n, A(m+1))$  از محور  $y$ ها برابر  $\sqrt{10}$  است؟

(۴)  $1$  و  $-2$ (۳)  $0$  و  $-2$ (۲)  $0$  و  $2$ (۱)  $0$  و  $1$ 

۲۴- نقاط  $A(2, -3, 4)$  و  $B(2, 2, 4)$  را در فضای  $R^3$  در نظر بگیرید. معادلات مربوط به پاره خط  $AB$  کدام است؟

$$\begin{cases} x = 2 \\ -3 \leq y \leq 2 \\ z = 4 \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ -3 \leq y \leq 2 \\ 2 \leq z \leq 4 \end{cases} \quad (۳)$$

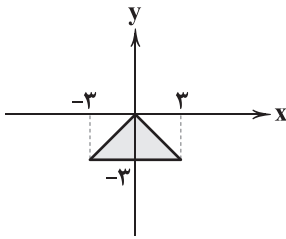
$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 2 \leq z \leq 4 \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ z = 4 \end{cases} \quad (۱)$$

۲۵- دو رأس مقابل یک وجه مکعبی  $A(1, 2, m)$  و  $B(2, 3, -1)$  است. اگر حجم مکعب  $\frac{4}{\sqrt{2}}$  باشد، فاصله مبدأ مختصات از  $A$  کدام است؟ ( $m > 0$ )

(۴)  $\sqrt{8} - \sqrt{1}$ (۳)  $\sqrt{6}$ (۲)  $\sqrt{8} + \sqrt{1}$ (۱)  $\sqrt{4} - \sqrt{1}$ 

محل انجام محاسبات



۲۶- ضابطه مربوط به شکل روبه‌رو کدام است؟

(۱)  $y \geq x, y \geq -x, y \geq -3$

(۲)  $y \leq x, y \geq -x, y \geq -3$

(۳)  $y \leq x, y \leq -x, y \leq -3$

(۴)  $x \geq y, -x \geq y, y \geq -3$

۲۷- دو نقطه  $A(a-1, 2a+b, 3a-2b)$  و  $B(2c, b-c+1, 4a+b)$  را در نظر بگیرید. اگر  $|AB|=0$ ، حاصل  $3b-2a-4c$  کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) ۱

۲۸- اگر سه نقطه  $A(2, 1, 3)$ ،  $B(3, 0, 5)$  و  $C(5, -4, 2)$  رأس‌های مثلث  $ABC$  باشند، نوع مثلث کدام است؟

(۱) نامشخص (۲) متساوی‌الاضلاع (۳) قائم‌الزاویه (۴) متساوی‌الساقین

۲۹- نقطه  $A=(3, -2, 4)$  مفروض است. اگر  $A'$  قرینه  $A$  نسبت به محور  $Oy$  و  $A''$  تصویر  $A$  بر روی صفحه  $xOy$  باشد، طول

پاره‌خط  $A'A''$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt{97}$  (۲)  $\sqrt{52}$  (۳)  $\sqrt{96}$  (۴)  $\sqrt{54}$

۳۰- فاصله مبدأ مختصات از صفحه‌ای که از نقطه  $A=(2, 3, -4)$  گذشته و با صفحه  $xOz$  موازی باشد، کدام است؟

(۱)  $\sqrt{13}$  (۲)  $\sqrt{20}$  (۳) ۴ (۴) ۳

### حسابان (۱)

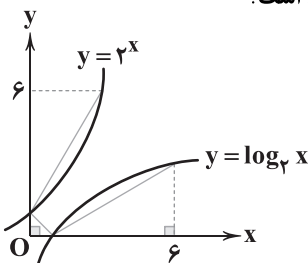
۳۱- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin 2\pi x}$  برابر است با:

(۱)  $\frac{1}{\pi}$  (۲)  $-\frac{1}{\pi}$  (۳)  $\frac{2}{\pi}$  (۴)  $-\frac{2}{\pi}$

۳۲- اگر  $2^x = 3^y = 5^z = 30^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$ ، آن‌گاه حاصل  $2^x + 3^y + 5^z$  برابر است با:

(۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۲۰

۳۳- اگر در شکل مقابل مجموع مساحت‌های سه مثلث قائم‌الزاویه برابر  $\frac{1}{4} \log_7 (2 \times 6^a)$  باشند، مقدار  $a$  کدام است؟



(۱) ۱۰

(۲) ۱۱

(۳) ۱۲

(۴) ۱۳

محل انجام محاسبات



۳۴- اگر  $\lim_{a \rightarrow b} \frac{2a^2b - ab^2 - b^3}{a^4 - b^4} = \frac{1}{12}$ ، آن گاه مقدار  $b$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۳۵- اگر  $y = 1 + \log_4 x$  و  $x^y = 4^6$ ، آن گاه  $y$  برابر است با:

- (۱) ۳ یا ۲ (۲) ۳ یا ۲- (۳) ۳- یا ۲- (۴) ۳- یا ۲-

### هندسه (۲)

۳۶- نقاط  $D(1, -1)$  و  $B(3, 3)$  دو رأس از مربع  $ABCD$  هستند. مختصات بازتاب یافته رأس  $C$  نسبت به امتداد ضلع  $AB$  کدام است؟

- (۱)  $(6, 3)$  (۲)  $(2, 6)$  (۳)  $(3, 2)$  (۴)  $(-4, 0)$

۳۷- نقطه دلخواه  $P$  درون مستطیل  $ABCD$  به ابعاد ۲ و ۴ را نسبت به ۴ ضلع بازتاب می‌دهیم تا نقاط  $A', B', C', D'$  به دست آید. مجموع

طول قطرهای چهارضلعی  $A'B'C'D'$  چقدر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۳۸- نقطه  $G$  محل هم‌رسمی میانه‌های مثلث  $ABC$  است. اگر مثلث  $ABC$  را با بردار  $\overrightarrow{AG}$  انتقال دهیم، مساحت ناحیه مشترک بین  $ABC$  و

تصویرش چه کسری از مساحت  $ABC$  است؟

- (۱)  $\frac{4}{9}$  (۲)  $\frac{1}{9}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴) اطلاعات کافی نیست.

۳۹- دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ مماس خارجند. فاصله بین دو مرکز تجانس مستقیم و معکوسی که این دو دایره را به یکدیگر تبدیل می‌کند، چقدر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۴۰- اگر  $O(1, m)$  مرکز دورانی باشد که  $A(-2, 1)$  را روی  $B(m, 5)$  تصویر می‌کند، مقدار بزرگ‌تر برای  $m$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۴۱- نقاط  $A(4, 0)$  و  $B(0, 6)$  در تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت  $k = -\frac{1}{4}$  به نقاط  $A'$  و  $B'$  تبدیل می‌شوند، مساحت

چهارضلعی  $ABA'B'$  چقدر است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۷ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۴۲- نقطه  $A(1, 2)$  را ابتدا نسبت به محور  $x$ ها بازتاب می‌دهیم تا به  $A'$  برسیم. اگر بازتاب یافته  $A'$  نسبت به خط  $y = \sqrt{3}x$  را  $A''$  بنامیم،

زاویه  $\angle OA''A'$  چند درجه است؟ ( $O$  مبدأ مختصات است.)

- (۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۲۰

۴۳- نقطه  $M$  روی قطر  $BD$  از مربع  $ABCD$  و نقطه  $N$  وسط ضلع  $AD$  است. در حالتی که محیط مثلث  $AMN$  کم‌ترین مقدار ممکن را دارد،

نسبت  $\frac{BM}{MD}$  چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{3}$

محل انجام محاسبات



۴۴- برای رسم خطی گذرنده از A در مثلث ABC که میانه BM و ضلع BC را در P و Q قطع کند به طوری که  $AP = 3PQ$ ، کدام تبدیل به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب (۲) دوران (۳) انتقال (۴) تجانس

۴۵- چهار نقطه  $A(4, 7)$ ،  $B(2, m)$ ،  $C(2, m-3)$  و  $D(6, 1)$  مفروضند. کم‌ترین اندازه خط شکسته ABCD کدام است؟

- (۱) ۹ (۲)  $3(\sqrt{5} + 1)$  (۳) ۱۳ (۴)  $3(\sqrt{10} + 1)$

### آمار و احتمال

۴۶- در کیسه‌ای ۶ گوی قرمز، ۴ گوی آبی و ۲ گوی زرد موجود است. از این کیسه سه گوی به تصادف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یک گوی قرمز خارج شده است؟

- (۱)  $\frac{1}{11}$  (۲)  $\frac{3}{11}$  (۳)  $\frac{7}{11}$  (۴)  $\frac{10}{11}$

۴۷- عددی به تصادف از مجموعه  $\{350, \dots, 53, 52, 51\}$  انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۵ بخش پذیر نیست؟

- (۱)  $\frac{5}{4}$  (۲)  $\frac{5}{5}$  (۳)  $\frac{6}{6}$  (۴)  $\frac{7}{7}$

۴۸- در پرتاب دو تاس سالم، اگر اختلاف برآمدها ۲ باشد، با کدام احتمال مجموع برآمدها بزرگ‌تر از ۵ است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

۴۹- از بین سه کارت با شماره‌های ۱، ۲ و ۳، یک کارت به تصادف برمی‌داریم و به تعداد عدد روی آن تاس می‌ریزیم. اگر مجموع برآمدهای تاس‌ها ۶ باشد، با کدام احتمال، کارت شماره ۲ خارج شده است؟

- (۱)  $\frac{25}{108}$  (۲)  $\frac{17}{36}$  (۳)  $\frac{15}{38}$  (۴)  $\frac{13}{144}$

۵۰- در یک آزمون تستی چهارگزینه‌ای، دانش‌آموزی به ۶ سؤال پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال دقیقاً به دو تست پاسخ نادرست می‌دهد؟ (پاسخ به همه تست‌ها الزامی است.)

- (۱)  $\frac{135}{212}$  (۲)  $\frac{35}{210}$  (۳)  $\frac{145}{210}$  (۴)  $\frac{45}{212}$

دفترچه شماره ۲

آزمون شماره ۱۷

جمعه ۱۴۰۱/۱۲/۰۵



# آزمون‌های سراسر گاج

گزینه درست را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

## سوالات آزمون

### پایه دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سوال: ۶۰	مدت پاسخگویی: ۷۵ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سوالات و مدت پاسخگویی

مدت پاسخگویی	شماره سوال		وضعیت پاسخگویی	تعداد سوال	مواد امتحانی	ردیف
	از	تا				
۵۰ دقیقه	۷۵	۵۱	اجباری	۲۵	فیزیک ۳	۱
	۸۵	۷۶	زوج کتاب	۱۰	فیزیک ۱	
	۹۵	۸۶		۱۰	فیزیک ۲	
۲۵ دقیقه	۱۱۰	۹۶	اجباری	۱۵	شیمی ۳	۲
	۱۲۰	۱۱۱	زوج کتاب	۱۰	شیمی ۱	
	۱۳۰	۱۲۱		۱۰	شیمی ۲	

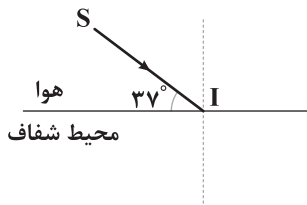




۵۱- نسبت ضریب شکست محیط شفاف A به ضریب شکست محیط شفاف B، برابر با  $\frac{5}{3}$  و ضریب شکست محیط شفاف C نسبت به ضریب شکست محیط شفاف B برابر با  $\frac{1}{6}$  است. تندی نور در محیط C چند برابر تندی نور در محیط A است؟

(۱)  $\frac{25}{9}$  (۲)  $\frac{9}{25}$  (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $\frac{5}{3}$

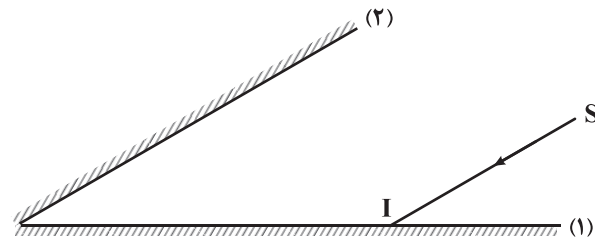
۵۲- مطابق شکل زیر، پرتوی نور تک‌رنگ SI به مرز جدایی هوا و محیط شفاف می‌تابد. بخشی از این پرتو در سطح جدایی دو محیط باز می‌تابد و بخش دیگر آن شکست یافته و وارد محیط شفاف می‌شود. اگر زاویه بین پرتوهای بازتاب و شکست  $90^\circ$  باشد، ضریب شکست محیط شفاف برابر کدام گزینه است؟ ( $n_{\text{هوا}} = 1, \sin 37^\circ = 0.6, \sin 53^\circ = 0.8$ )



(۱)  $\frac{5}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$

(۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{3}{5}$

۵۳- مطابق شکل زیر، پرتوی نور تک‌رنگ SI موازی سطح آینه تخت (۲) به آینه تخت (۱) می‌تابد و پس از بازتابش‌های متوالی از آینه‌ها، در امتداد اولیه باز می‌گردد. اگر در مجموع این پرتو ۵ بار به سطح آینه‌ها برخورد کرده باشد، زاویه بین دو آینه تخت چند درجه است؟



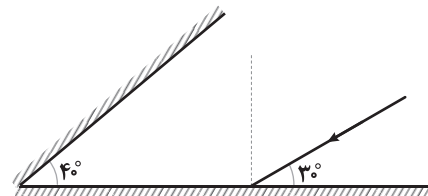
(۱) ۳۰

(۲) ۴۵

(۳) ۶۰

(۴) ۷۵

۵۴- مطابق شکل زیر، یک پرتوی نور به مجموعه دو آینه تخت متقاطع بسیار بلند تابش می‌شود. زاویه بین پرتوی ورودی اولیه و پرتوی خروجی نهایی چند درجه است؟



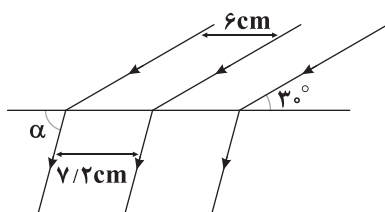
(۱) ۶۰

(۲) ۱۲۰

(۳) ۸۰

(۴) ۱۶۰

۵۵- شکل زیر جبهه‌های یک موج الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد که با سطح جداکننده دو محیط شفاف برخورد کرده‌اند.  $\alpha$  چند درجه است؟ ( $\sin 37^\circ = 0.6, \sin 53^\circ = 0.8, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ )



(۱) ۴۵

(۲) ۳۰

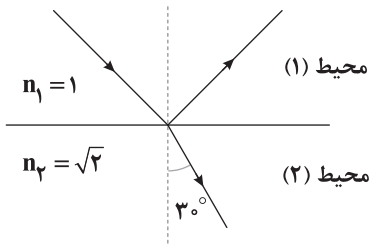
(۳) ۵۳

(۴) ۳۷

محل انجام محاسبات

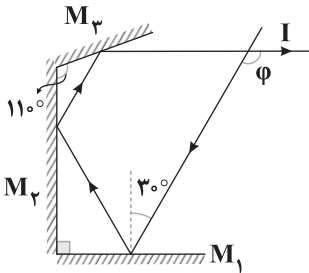


۵۶- مطابق شکل زیر، یک باریکه نور تک‌رنگ به سطح جداکننده دو محیط شفاف می‌تابد، بخشی از آن بازتاب و بخشی وارد محیط دوم می‌شود. زاویه بین پرتوی بازتاب و شکست چند درجه است؟



- (۱) ۷۵  
(۲) ۱۲۰  
(۳) ۱۰۵  
(۴) ۹۰

۵۷- در شکل زیر پرتو (۱) پس از بازتاب از آینه  $M_3$  نسبت به مسیر اولیه خود چند درجه منحرف ( $\phi$ ) شده است؟



- (۱) ۱۴۰  
(۲) ۱۲۰  
(۳) ۱۱۰  
(۴) ۱۰۰

۵۸- شخصی تفنگ به دست بین دو کوه که دیوار عمودی قائم دارند، قرار دارد و فاصله‌اش از کوه نزدیک‌تر  $700\text{ m}$  است. اگر شخص هم‌زمان با

شلیک گلوله توسط تفنگش با سرعت  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  به سمت کوه نزدیک‌تر برود، اولین پژواک صوت را  $4\text{ s}$  پس از شلیک و صدای پژواک دوم را  $2\text{ s}$

پس از پژواک اول می‌شنود. فاصله دو کوه چند متر است؟

- (۱) ۱۷۵۰ (۲) ۱۶۹۰ (۳) ۱۷۴۰ (۴) ۱۷۰۰

۵۹- چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

(الف) در پدیده پراش، به‌ازای یک طول موج معین، هر چه پهنای شکاف کوچک‌تر باشد، پراش بارزتر است.

(ب) پدیده پراش فقط برای امواجی رخ می‌دهد که به محیط مادی نیاز دارند.

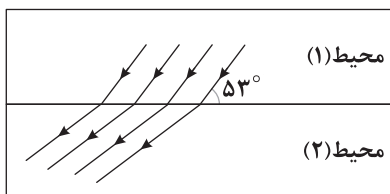
(ج) اگر آزمایش یانگ را به جای هوا در آب انجام دهیم، پهنای نوارها بزرگ‌تر می‌شود.

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۶۰- مطابق شکل زیر، جبهه‌های یک موج الکترومغناطیسی به مرز جداکننده دو محیط شفاف می‌تابد. بخشی از آن‌ها در محیط اول بازتاب و

بخش دیگر وارد محیط دوم می‌شوند. اگر تندی موج به علت تغییر محیط انتشار  $25\%$  کاهش یافته باشد، زاویه بین جبهه‌های موج فرودی و

بازتاب‌شده در محیط اول چند برابر زاویه شکست موج است؟ ( $\sin 30^\circ = 0.5$ ,  $\sin 37^\circ = 0.6$ ,  $\sin 60^\circ = 0.85$ )

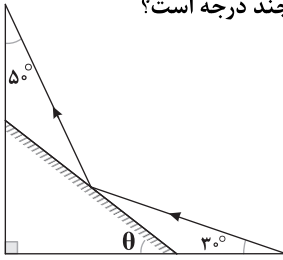


- (۱)  $\frac{4}{3}$   
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴)  $\frac{6}{5}$

محل انجام محاسبات



۶۱- مطابق شکل زیر، آینه تختی به سطح افقی و دیوار قائم تکیه داده شده است. پرتوی نوری که با سطح افقی زاویه  $30^\circ$  می‌سازد، به آینه تابیده می‌شود و پرتوی بازتاب آن از آینه با دیوار قائم زاویه  $50^\circ$  می‌سازد. زاویه بین آینه و سطح افقی ( $\theta$ ) چند درجه است؟



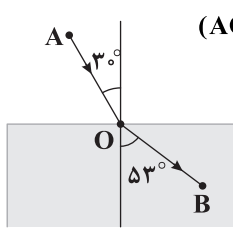
(۱) ۲۵

(۲) ۳۰

(۳) ۳۵

(۴) ۵۰

۶۲- مطابق شکل زیر، پرتوی نور تک‌رنگی از نقطه A در محیط شفاف اول به نقطه B در محیط شفاف دوم می‌رود. اگر تندی موج در محیط



اول،  $20 \frac{m}{s}$  باشد، چند ثانیه طول می‌کشد تا نور از نقطه A به نقطه B برسد؟ ( $AO = OB = 8m$  و  $\sin 53^\circ = 0.8$ )

(۱) ۰/۵

(۲) ۰/۸

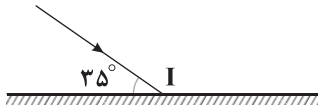
(۳) ۰/۶۵

(۴) ۰/۷۵

۶۳- یک پرتوی نور تک‌رنگ با ورود از محیط شفاف اول به محیط شفاف دوم  $30^\circ$  منحرف شده و تندی آن  $\sqrt{3}$  برابر می‌شود. زاویه تابش این پرتو چند درجه بوده است؟

(۴)  $15^\circ$ (۳)  $30^\circ$ (۲)  $45^\circ$ (۱)  $60^\circ$ 

۶۴- مطابق شکل زیر، پرتوی نوری به سطح آینه تختی می‌تابد. اگر آینه حول نقطه تابش I،  $20^\circ$  در جهت ساعتگرد دوران کند، زاویه بین پرتوی تابش و بازتابش چند درجه می‌شود؟



(۲) ۸۰

(۱) ۱۱۰

(۴) ۱۵۰

(۳) ۷۰

۶۵- در مدت زمانی که پرتوی نور تک‌رنگی مسافت  $160$  سانتی‌متر را در شیشه‌ای با ضریب شکست  $\frac{3}{4}$  طی می‌کند، مسافت چند سانتی‌متری را

می‌تواند در آب با ضریب شکست  $\frac{4}{3}$  طی کند؟

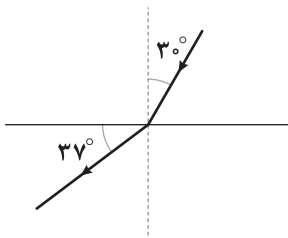
(۴) ۱۰۰

(۳) ۳۲۰

(۲) ۱۸۰

(۱) ۸۰

۶۶- در شکل زیر، پرتوی نور تک‌رنگی از محیط شفاف (۱) وارد محیط شفاف (۲) می‌شود. طول موج این پرتو چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟



(۱) ۴۰- افزایش

(۲) ۴۰- کاهش

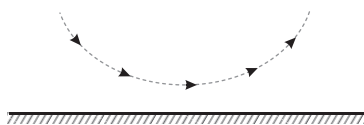
(۳) ۶۰- افزایش

(۴) ۶۰- کاهش

محل انجام محاسبات



۶۷- مطابق شکل زیر، پرتوی نوری با نزدیک شدن به سطح زمین، مسیری منحنی شکل را طی می‌کند و بازمی‌گردد. با دور شدن از سطح زمین، دما ..... می‌یابد.



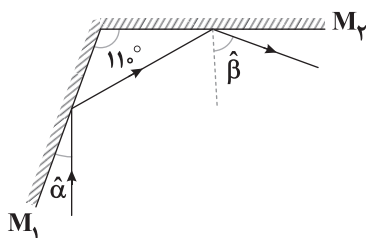
(۱) کاهش

(۲) افزایش

(۳) ابتدا کاهش و سپس افزایش

(۴) ابتدا افزایش و سپس کاهش

۶۸- مطابق شکل زیر، پرتوی نوری به آینه تخت  $M_1$  می‌تابد و از آینه تخت  $M_2$  بازتاب می‌شود. چه رابطه‌ای بین زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  برقرار است؟

(۱)  $\alpha - \beta = 20^\circ$ (۲)  $\alpha = 20^\circ - 2\beta$ (۳)  $\alpha - \beta = -20^\circ$ (۴)  $\beta = 2\alpha + 20^\circ$ 

۶۹- تحلیل نقش پراش بر اساس ..... است و این پدیده برای ..... رخ می‌دهد.

(۱) تداخل امواج - امواج الکترومغناطیسی

(۲) تداخل امواج - همه انواع موج

(۳) بازتاب امواج - امواج الکترومغناطیسی

(۴) بازتاب امواج - همه انواع موج

۷۰- در کدام گزینه برای مکان‌یابی پژواکی از امواج الکترومغناطیسی استفاده می‌شود؟

(۱) دستگاه سونار

(۲) سونوگرافی

(۳) رادار دوپلری

(۴) دستگاه لیتوتریپسی

۷۱- یک موج عرضی از یک طناب ضخیم وارد یک طناب نازک می‌شود، طول موج دو موج عبوری و بازتاب‌شده نسبت به موج تابش‌شده به ترتیب چگونه است؟

(۱) بیشتر - کم‌تر

(۲) بیشتر - ثابت

(۳) کم‌تر - ثابت

(۴) کم‌تر - کم‌تر

۷۲- یک موج الکترومغناطیسی در یک محیط شفاف با تندی  $4 \times 10^8 \frac{m}{s}$  منتشر می‌شود و فاصله دو قله متوالی آن برابر  $12 \text{ cm}$  است. اگر این موج

در محیط شفاف دیگری که نسبت ضریب شکست آن به ضریب شکست محیط شفاف اول برابر با  $\frac{1}{3}$  است، منتشر شود، آن‌گاه فاصله یک قله از دره متوالی آن چند سانتی‌متر می‌شود؟

(۱) ۱۸۰

(۲) ۲۴۰

(۳) ۳۶۰

(۴) ۷۲۰

۷۳- یک موج الکترومغناطیسی از هوا وارد محیط شفافی به ضریب شکست  $n$  می‌شود و فاصله بین دو جبهه موج متوالی آن  $20\%$  درصد کاهش می‌یابد. ضریب شکست این مایع برابر کدام گزینه است؟

(۱)  $\frac{5}{4}$ (۲)  $\frac{4}{5}$ (۳)  $\frac{1}{5}$ 

(۴) ۵

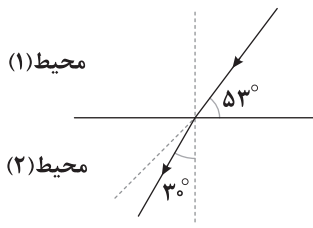
۷۴- یک موج صوتی با زاویه تابش  $45^\circ$  از هوا وارد آب می‌شود. اگر این موج با ورود به آب از مسیر خود به اندازه  $15^\circ$  منحرف شود، سرعت صوت در محیط شفاف دوم نسبت به محیط شفاف اول چند برابر می‌شود؟

(۱)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (۲)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۳)  $\sqrt{2}$ (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 

محل انجام محاسبات



۷۵- مطابق شکل زیر، پرتوی نور تک‌رنگی از محیط شفاف (۱) وارد محیط شفاف (۲) می‌شود. اگر طول موج آن در محیط (۱)  $\lambda_1$  و در محیط



(۲)  $\lambda_2$  باشد.  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  برابر کدام گزینه است؟  $(\sin 37^\circ = 0.6, \sin 53^\circ = 0.8)$

(۱)  $\frac{6}{5}$

(۲)  $\frac{8}{5}$

(۳) ۲

(۴)  $\frac{1}{5}$

توجه: داوطلب گرامی، لطفاً از بین سوالات زوج درس ۱ (فیزیک (۱)، شماره ۷۶ تا ۸۵) و زوج درس ۲ (فیزیک (۲)، شماره ۸۶ تا ۹۵)، فقط یک سری را به انتخاب خود پاسخ دهید.

## زوج درس ۱

## فیزیک ۱ (سوالات ۷۶ تا ۸۵)

۷۶- جسمی تحت تأثیر هم‌زمان دو نیروی  $\vec{F}_1 = 8\vec{i} - 6\vec{j}$  و  $\vec{F}_2 = 12\vec{i} - 5\vec{j}$  روی سطح افقی بدون اصطکاک به اندازه ۱۲ متر در خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود. کار کل انجام شده روی این جسم چند ژول است؟ (بردارها برحسب واحد SI هستند).

(۱)  $-120$

(۲)  $-160$

(۳)  $-240$

(۴)  $-320$

۷۷- گلوله‌ای را با سرعت ۷ در شرایط خلأ در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. سرعت گلوله چند برابر ۷ باشد تا ارتفاع اوج گلوله (بیشترین ارتفاع گلوله از سطح زمین) ۶۹ درصد افزایش یابد؟

(۱)  $\frac{1}{3}$

(۲)  $\frac{1}{3}$

(۳)  $\sqrt{\frac{1}{3}}$

(۴) ۳

۷۸- گلوله‌ای به جرم ۲۰۰ گرم با سرعت اولیه  $10 \frac{m}{s}$  در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. در لحظه‌ای که انرژی جنبشی گلوله به  $7/5 J$  می‌رسد، فاصله آن تا نقطه اوج (بیشترین ارتفاع از سطح زمین) چند متر است؟ (از مقاومت هوا صرف نظر کنید و  $g = 10 \frac{N}{kg}$ )

(۱)  $1/25$

(۲)  $2/5$

(۳)  $3/75$

(۴) ۵

۷۹- جسمی به جرم  $2 kg$  با تندی ۷ در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود و با تندی  $20 \frac{m}{s}$  به نقطه اولیه پرتاب باز می‌گردد. اگر کاهش انرژی مکانیکی جسم در اثر برخورد با مولکول‌های هوا در کل مسیر حرکت برابر  $4/4 J$  باشد،  $v_0$  چند متر بر ثانیه است؟

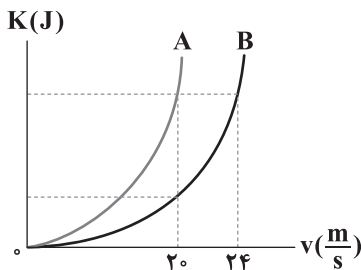
(۱)  $\sqrt{11}$

(۲)  $2\sqrt{11}$

(۳) ۲۲

(۴) ۲۴

۸۰- نمودار تغییرات انرژی جنبشی برحسب تندی دو جسم A و B، مطابق شکل زیر است. جرم جسم A چند برابر جرم جسم B است؟



(۱)  $1/2$

(۲)  $1/4$

(۳)  $1/44$

(۴)  $1/69$

محل انجام محاسبات



۸۱- چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

(الف) در جابه‌جایی قائم و رو به بالا همواره کار نیروی وزن، مثبت است.

(ب) کار نیروی وزن فرینته تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی جسم است.

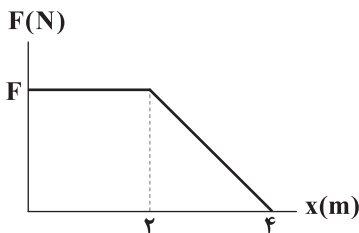
(ج) کار نیروی وزن به مسیر حرکت جسم بستگی ندارد.

(د) کار نیروی وزن در جابه‌جایی افقی، صفر است.

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸۲- نمودار نیروی وارد بر جسمی برحسب مکان آن، مطابق شکل زیر است. کار انجام‌شده توسط این نیرو بر روی جسم در جابه‌جایی آن از

مکان  $x=0$  تا مکان  $x=2\text{m}$  چند برابر کار انجام‌شده توسط همین نیرو بر روی جسم در جابه‌جایی آن از مکان  $x=0$  تا  $x=4\text{m}$  است؟



(۱)  $\frac{1}{2}$

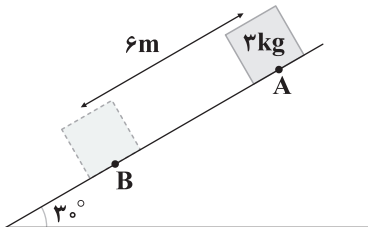
(۲)  $\frac{2}{3}$

(۳)  $\frac{3}{4}$

(۴)  $\frac{4}{5}$

۸۳- مطابق شکل زیر، جسمی به جرم  $3\text{kg}$  از نقطه A رها می‌شود و با تندی  $4\frac{\text{m}}{\text{s}}$  به نقطه B می‌رسد. اندازه نیروی اصطکاک بین جسم و سطح

در طول مسیر چند نیوتون بوده است؟ ( $g=10\frac{\text{N}}{\text{kg}}$  و نیروی اصطکاک بین جسم و سطح در کل طول مسیر ثابت است.)



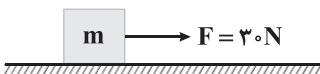
(۱) ۵/۵

(۲) ۱۱

(۳) ۲۲

(۴) ۳۳

۸۴- جسمی به جرم  $m$  تأثیر نیروی ثابت  $\vec{F}$  به بزرگی  $30$  نیوتون با تندی ثابت  $2\frac{\text{m}}{\text{s}}$  به مدت  $10$  ثانیه و بدون تغییر جهت، در امتداد خط راست



جابه‌جا می‌شود. کار نیروی اصطکاک بر روی جسم در این جابه‌جایی چند کیلوژول بوده است؟

(۲) ۶۰۰

(۱) ۰/۶

(۴) -۶۰۰

(۳) -۰/۶

۸۵- اگر کار نیروی وزن وارد بر جسمی طی جابه‌جایی از نقطه A تا نقطه B برابر  $40\text{J}$  و انرژی پتانسیل گرانشی جسم در نقطه A برابر  $15\text{J}$

باشد، انرژی پتانسیل گرانشی جسم در نقطه B چند ژول است؟

(۴) ۲۲۰

(۳) ۱۶۵

(۲) ۱۱۰

(۱) ۵۵

محل انجام محاسبات



## زوج درس ۲

## فیزیک ۲ (سوالات ۸۶ تا ۹۵)

۸۶- در یک آذرخش،  $J = 4/5 \times 10^8$  انرژی تحت اختلاف پتانسیل الکتریکی  $2MV$  در بازه زمانی  $0/4s$  آزاد می‌شود. شدت جریان الکتریکی متوسط در طی رخ دادن این حادثه چند آمپر است؟

۱۶۸۷/۵ (۴)

۱۱۲۵ (۳)

۵۶۲/۵ (۲)

۲۸۱/۲۵ (۱)

۸۷- دو رسانای الکتریکی با ضریب دمایی مقاومت ویژه  $\alpha$  و  $3\alpha$  در دمای صفر درجه سلسیوس به ترتیب دارای مقاومت‌های  $R_0$  و  $3R_0$  هستند. هم‌چنین در دمای  $\theta$ ، این دو رسانا به ترتیب دارای مقاومت‌های  $4R_0$  و  $R'$  هستند. مقاومت الکتریکی  $R_0$  چند برابر مقاومت الکتریکی  $R'$  است؟

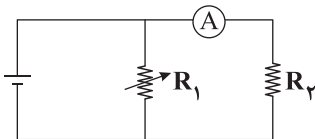
$\frac{1}{15}$  (۴)

$\frac{1}{30}$  (۳)

۱۵ (۲)

۳۰ (۱)

۸۸- در مدار شکل زیر، اگر مقاومت متغیر  $R_1$  را به آرامی کاهش دهیم، عددی که آمپرسنج ایده‌آل نشان می‌دهد، چگونه تغییر می‌کند؟



(۱) الزاماً ثابت می‌ماند.

(۲) الزاماً کاهش می‌یابد.

(۳) الزاماً افزایش می‌یابد.

(۴) بسته به شرایط ممکن است ثابت بماند یا کاهش یابد.

۸۹- دو سیم فلزی A و B دارای طول یکسانی هستند. سیم A، سیم توپری از جنس مس به قطر  $2mm$  و سیم B لوله‌ای توخالی از جنس آهن به شعاع خارجی  $3mm$  و شعاع داخلی  $2mm$  می‌باشد. در دمای ثابت و یکسان، مقاومت سیم B چند برابر مقاومت سیم A است؟ (مقاومت ویژه آهن، ۶ برابر مقاومت ویژه مس است.)

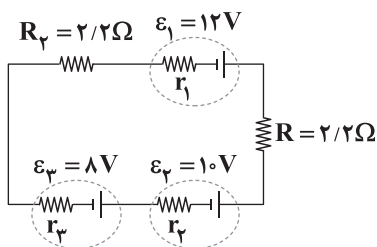
$\frac{6}{5}$  (۴)

$\frac{5}{24}$  (۳)

$\frac{5}{6}$  (۲)

$\frac{24}{5}$  (۱)

۹۰- در مدار شکل زیر، مقاومت درونی تمام باتری‌ها برابر با  $1/2\Omega$  است. توان خروجی باتری با نیروی محرکه  $\epsilon_3$  چند برابر توان ورودی باتری با

نیروی محرکه  $\epsilon_1$  است؟

$\frac{71}{129}$  (۱)

$\frac{142}{111}$  (۲)

$\frac{129}{71}$  (۳)

$\frac{111}{142}$  (۴)

۹۱- ماشین حسابی از باتری ۳ ولتی جریانی برابر  $0/6$  آمپر می‌کشد. اگر باتری ضعیف شده و ولتاژ آن  $30\%$  درصد افت کند، مقدار بار الکتریکی عبوری در مدت‌زمان مشخص از یک سطح مقطع مشخص مدار ماشین حساب نسبت به حالت اولیه چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

۳۰ - کاهش (۴)

۷۰ - افزایش (۳)

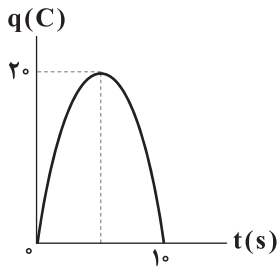
۷۰ - کاهش (۲)

۳۰ - افزایش (۱)

محل انجام محاسبات



۹۲- نمودار بار گذرنده از سطح مقطع رسانا برحسب زمان، به صورت سهمی زیر است. در کدام بازه زمانی جریان متوسط عبوری از این سطح



مقطع رسانا برابر صفر است؟

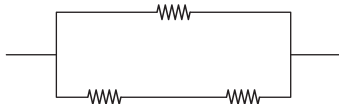
(۱)  $t_1 = 0$  تا  $t_2 = 5s$

(۲)  $t_1 = 1s$  تا  $t_2 = 7s$

(۳)  $t_1 = 2s$  تا  $t_2 = 8s$

(۴) اطلاعات سؤال کافی نیست.

۹۳- حداکثر توان قابل تحمل هر یک از مقاومت‌های مشابه مدار شکل زیر،  $60^\circ$  وات است. حداکثر توان مصرفی مدار چند وات باشد تا به هیچ یک



از مقاومت‌ها آسیبی نرسد؟

(۱) ۱۵

(۲) ۳۰

(۳) ۶۰

(۴) ۹۰

۹۴- یک لامپ برای کار با اختلاف پتانسیل الکتریکی  $200^\circ$  ولتی ساخته شده است. اگر این لامپ را با اختلاف پتانسیل الکتریکی  $250^\circ$  ولت روشن

کنیم، توان لامپ چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

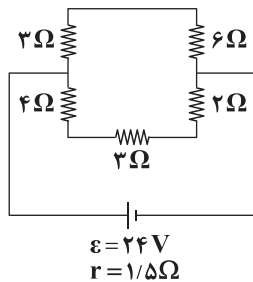
(۴)  $43/75$  - افزایش

(۳)  $56/25$  - کاهش

(۲)  $56/25$  - افزایش

(۱)  $43/75$  - کاهش

۹۵- در مدار شکل زیر، بازده باتری چند درصد است؟



(۱) ۷۵

(۲) ۴۰

(۳) ۶۰

(۴) ۲۵



۹۶- چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

- آنتالپی فروپاشی شبکه نمک خوراکی معادل گرمای مبادله‌شده واکنش  $\text{NaCl(s)} \rightarrow \text{Na(g)} + \text{Cl(g)}$  است.
- وارونه شعاع یون‌ها کمیتی است که می‌تواند برای مقایسه میزان برهم‌کنش یون‌ها به کار رود.
- برای نمایش آرایش یون‌ها در شبکه بلوری ترکیب‌های یونی از هر دو مدل فضا پرکن و مدل گلوله و میله می‌توان استفاده کرد.
- چگالی بار یون سولفید بیشتر از چگالی بار یون فلئورید است.

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

محل انجام محاسبات





۹۷- ساختار و شکل چه تعداد از گونه‌های زیر خمیده (V شکل) است؟

$\text{N}_2\text{O}$ •	$\text{NO}_2^+$ •	$\text{CS}_2$ •
$\text{H}_2\text{S}$ •	$\text{NOCl}$ •	$\text{OF}_2$ •
۵ (۴)	۴ (۳)	۳ (۲)
		۲ (۱)

۹۸- آنتالپی فروپاشی شبکه بلور کدام دو ترکیب اختلاف بیشتری با هم دارند؟

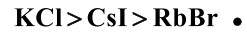
$\text{LiCl}, \text{LiF}$ (۴)	$\text{LiBr}, \text{LiCl}$ (۳)	$\text{KF}, \text{NaF}$ (۲)	$\text{NaF}, \text{LiF}$ (۱)
-------------------------------	--------------------------------	-----------------------------	------------------------------

۹۹- کدام ماده در حالت مایع، انرژی گرمایی را بیشتر نگه می‌دارد؟

(۴) اکسیژن	(۳) سدیم نیترات	(۲) اتانول	(۱) آب
------------	-----------------	------------	--------

۱۰۰- در چه تعداد از موارد زیر، آرایش الکترونی آنیون و کاتیون هر کدام از ترکیب‌های یونی یکسان، اما مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه بلوری

آن‌ها نادرست است؟



۳ (۴)	۲ (۳)	۱ (۲)	صفر (۱)
-------	-------	-------	---------

۱۰۱- چه تعداد از عبارت‌های زیر در ارتباط با کربونیل سولفید درست است؟

• یک ماده مولکولی بوده و ساختار آن خطی است.

• گشتاور دوقطبی آن بزرگ‌تر از صفر است.

• نسبت شمار جفت الکترون‌های پیوندی به جفت الکترون‌های ناپیوندی آن برابر ۱ است.

• اتم مرکزی در آن بار جزئی مثبت دارد.

۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
-------	-------	-------	-------

۱۰۲- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

• در دوره سوم جدول تناوبی از چپ به راست با افزایش عدد اتمی، شعاع کاتیون‌های پایدار همانند شعاع آنیون‌های پایدار کاهش می‌یابد.

• کربن تتراکلرید همانند اتین یک مولکول ناقطبی بوده اما رنگ اتم مرکزی در نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی دو مولکول متفاوت است.

• در دوره دوم جدول تناوبی شعاع هر کدام از آنیون‌ها بزرگ‌تر از شعاع هر کدام از کاتیون‌ها است.

• تنها عاملی که می‌تواند تقارن و توزیع یکنواخت بارهای الکتریکی را در مولکول‌های چنداتمی به هم بزند، وجود جفت الکترون‌های

ناپیوندی روی اتم مرکزی است.

۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
-------	-------	-------	-------

۱۰۳- اگر نسبت بار به شعاع در یون پایدار سولفید برابر  $\frac{e}{\text{pm}} \times 10^{-2} \times 1/0.8$  باشد، شعاع آن به تقریب برابر چند nm است؟

۰/۱۸۵ (۴)	۱/۸۵ (۳)	۰/۱۶۲ (۲)	۱/۶۲ (۱)
-----------	----------	-----------	----------

محل انجام محاسبات















# آزمون‌های سراسری کاج

گزینه‌درا انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

دفترچه شماره ۳

آزمون شماره ۱۷

جمعه ۱۴۰۱/۱۲/۰۵

## پاسخ‌های تشریحی

### پایه دوازدهم ریاضی

#### دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤال: ۱۱۰	مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

مدت پاسخگویی	شماره سؤال		تعداد سؤال	مواد امتحانی	ردیف
	از	تا			
۷۵ دقیقه	۱۰	۱	۱۰	حسابان ۲	۱
	۲۰	۱۱	۱۰	ریاضیات گسسته	
	۳۰	۲۱	۱۰	هندسه ۳	
	۳۵	۳۱	۵	حسابان ۱	
	۴۵	۳۶	۱۰	هندسه ۲	
	۵۰	۴۶	۵	آمار و احتمال	
۵۰ دقیقه	۷۵	۵۱	۲۵	فیزیک ۳	۲
	۸۵	۷۶	۱۰	فیزیک ۱	
	۹۵	۸۶	۱۰	فیزیک ۲	
۲۵ دقیقه	۱۱۰	۹۶	۱۵	شیمی ۳	۳
	۱۲۰	۱۱۱	۱۰	شیمی ۱	
	۱۳۰	۱۲۱	۱۰	شیمی ۲	





$$m = f'(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)^2} = \frac{1}{(1+\sqrt{7})^2} = \frac{4}{8+2\sqrt{7}} = \frac{2}{4+\sqrt{7}}$$

$$y=0 \Rightarrow \frac{2}{4+\sqrt{7}}(x+2)$$

$$x=0 \Rightarrow y = OB = \frac{4}{4+\sqrt{7}} = \frac{4(4-\sqrt{7})}{9}$$

$$S_{OAB} = \frac{2 \times \frac{4(4-\sqrt{7})}{9}}{2} = \frac{4}{9}(4-\sqrt{7})$$

**نکته:** شرط لازم برای وجود مشتق چپ، پیوستگی چپ و شرط لازم برای وجود مشتق راست، پیوستگی راست است.

برای تابع  $f(x)$  در  $x=2$  داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \sqrt{(-4)^-} = -3.5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \sqrt{(-4)^+} = -2.8 \\ f(2) = -2.8 \end{cases}$$

بنابراین تابع  $f(x)$  در  $x=2$  فقط پیوستگی چپ دارد پس مشتق راست موجود نیست.

$$A = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h^2) - f(2)}{-h^2} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = -f'_+(2)$$

$$B = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2-h^2) - f(2)}{h^2} = - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2-h^2) - f(2)}{-h^2} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = -f'_-(2)$$

برای یافتن مشتق چپ در  $x=2$  ابتدا براکت را به عدد تبدیل می‌کنیم.

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow f(x) = (x^3 - 1)[(-4)^+] = -4(x^3 - 1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -4(3x^2) \Rightarrow f'_-(2) = (-4)(12) = -48 \Rightarrow B = 48$$

تابع در  $x=2$  دارای نیم‌مماس‌های چپ و راست است پس در این نقطه پیوسته است. داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{4}{1} = 4 = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lambda a - b \end{cases} \Rightarrow \lambda a - b = 4 \quad (1)$$

از طرفی برای یافتن شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست باید مشتق‌های چپ و راست را محاسبه کنیم، داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x\sqrt{x-1} - \frac{x^2}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} & x > 2 \\ \frac{3ax^2 - b}{(x-3)^2} & x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(2) = 2 \\ f'_-(2) = 12a - b \end{cases}$$

نیم‌مماس‌های چپ و راست بر هم عمودند بنابراین داریم:

$$12a - b = -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} \lambda a - b = 4 \\ 12a - b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{9}{8} \\ b = -13 \end{cases}$$

## ریاضیات

۳ | ۱

از رابطه  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh} = \left(\frac{m-n}{k}\right)f'(a)$  داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+2h) - f(-2-2h)}{h(-\Delta+h)} = \frac{2-(-2)}{-\Delta} f'(-2) = \frac{-4}{\Delta} f'(-2)$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{\Delta} f'(-2) = \lambda \Rightarrow f'(-2) = -\lambda$$

از رابطه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$  داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(-2) - f(x)}{\sqrt{3-3x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(-2) - f(x)}{\sqrt{3-3x} - 2} \times \frac{\sqrt{3-3x} + 2}{\sqrt{3-3x} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(f(x) - f(-2)) \times 6}{-3(x+2)} = 2f'(-2) = -2 \end{aligned}$$

در نقطه‌ای به طول  $x=1$  خط  $y=2x-3$  بر منحنی  $f(x)$  مماس است بنابراین داریم:

(۱)  $x=1$  نقطه مشترک خط مماس و منحنی  $f(x)$  است  
بنابراین  $f(1) = -1$

(۲) شیب خط مماس برابر ۲ است بنابراین  $f'(1) = 2$

برای بررسی حد داده شده از روش ۲ می‌توان استفاده کرد:

روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - f(1) + xf(1) - xf(1)}{(x-1)(x^2+x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - f(1)}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(f(x) - f(1))}{x-1} + \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)(x-1)}{x-1} = \frac{1}{3} f'(1) + \frac{1}{3} f(1) \\ &= \frac{1}{3}(2-1) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

روش دوم: از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - f(1)}{x^3 - 1} &\stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + xf'(x)}{3x^2} \\ &= \frac{f(1) + f'(1)}{3} = \frac{-1+2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

مختصات نقطه تماس را  $(\alpha, \frac{2\alpha-3}{\alpha-1})$  فرض می‌کنیم. شیب

خط مماس را از دو طریق مشتق و  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  می‌نویسیم.

$$f(x) = \frac{2x-3}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \text{مماس } m = f'(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{نقطه تماس } (\alpha, \frac{2\alpha-3}{\alpha-1}) \\ \text{مماس } m = \frac{\frac{2\alpha-3}{\alpha-1} - 0}{\alpha-1} = \frac{2\alpha-3}{(\alpha-1)(\alpha+2)} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\alpha-1)^2} = \frac{2\alpha-3}{(\alpha-1)(\alpha+2)} \Rightarrow \frac{1}{\alpha-1} = \frac{2\alpha-3}{\alpha+2}$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 - 5\alpha + 3 = \alpha + 2 \Rightarrow 2\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$$

طبق نمودار  $\alpha > 1$  است، بنابراین  $\alpha = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$  است.



۱۰ | ۳

آهنگ متوسط تغییر تابع  $f(x)$  در بازه  $[a, b]$  برابر  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع  $f(x)$  در نقطه  $x=a$  برابر  $f'(a)$  می‌باشد. مساحت مستطیل، حاصل ضرب طول و عرض نقطه  $M$  است. داریم:

$$S = x(2 - \frac{x}{2}) = 2x - \frac{x^2}{2}$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{S(2) - S(0)}{2 - 0} = \frac{(4 - 2) - 0}{2} = 1$$

$$S'(x) = 2 - x \Rightarrow \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = S'(2) = 2 - 2 = 0$$

$$1 - (-1) = 2 \Rightarrow \text{اختلاف آهنگ متوسط و لحظه‌ای}$$

۱۱ | ۱ برای این منظور، باید در ۹ بار قبلی، ۳ بار «رو» آمده باشد و دفعهٔ دهم نیز سکه «رو» بیاید.

$$\binom{9}{3} = 84$$

۱۲ | ۴ به ۳ حالت می‌توانیم این عدد را بسازیم:

حالت اول: هر سه رقم متفاوت باشد:  $3! = 6 = \text{تعداد حالات}$

حالت دوم: دو رقم مثل هم باشد:  $\binom{3}{1} \binom{2}{1} \times \frac{3!}{2!} = 18 = \text{تعداد حالات}$

حالت سوم: سه رقم مثل هم باشند:  $\binom{3}{1} = 3 = \text{تعداد حالات}$

$$\text{تعداد کل حالات} = 6 + 18 + 3 = 27$$

۱۳ | ۳ ابتدا دو زوج از بین ۶ زوج را به ۱۵ حالت انتخاب می‌کنیم.

از بین ۴ زوج باقی‌مانده باید ۳ زوج را انتخاب کنیم و از بین هر زوج فقط یکی را انتخاب کنیم تا دقیقاً ۲ زوج داشته باشیم:  $\binom{4}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 8 = 32$   
جواب نهایی  $= 15 \times 32 = 480$

۱۴ | ۳ روش اول: رقم اول نمی‌تواند صفر باشد، پس یکی از ارقام «۱، ۲، ۳» قرار می‌گیرد (۵ انتخاب) و ۶ رقم دیگر جلوی آن صف می‌شوند.  $(5 \times 6!)$

چون سه رقم ۱ و دو رقم صفر داریم، پس  $3! \times 2! = 3! \times 2!$  تعداد جایگشت‌های ارقام ۰ و ۱ هستند که باعث تولید عدد تکراری می‌شود.

$$\text{کل اعداد ساخته شده} = \frac{5 \times 6!}{3! \times 2!} = 300$$

روش دوم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد حالاتی که رقم اول ۱ باشد} \\ = \frac{6!}{2! \times 2!} = 180 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد حالاتی که رقم اول ۲ باشد} \\ = \frac{6!}{3! \times 2!} = 60 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد حالاتی که رقم اول ۳ باشد} \\ = \frac{6!}{3! \times 2!} = 60 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{کل اعداد ۷ رقمی} = 180 + 60 + 60 = 300$$

۶ | ۱ نکته: ۱) برای مشتق‌گیری از تابع دارای عامل صفرکننده، فقط از عامل صفرکننده مشتق می‌گیریم.

۲) اگر تابع  $f(x)$  بر تابع  $g(x)$  مماس باشد، معادله  $f(x) = g(x)$  ریشه مکرر دارد.

برای مشتق‌گیری از تابع  $f(x)$  در  $x=0$  داریم:

$$f'(x) = \frac{2 \cos 2x \sqrt{9x^2 - x + 1}}{\cos^2 3x \sqrt{x^2 + x + 1}} \Rightarrow f'(0) = \frac{2 \times 1 \times 2}{1 \times 1} = 4$$

طول نقطه تماس  $x=0$  است پس عرض آن  $f(0)=0$  خواهد بود. معادله مماس را بدین صورت می‌نویسیم:

$$y - 0 = 4(x - 0) \Rightarrow y = 4x$$

خط  $y = 4x$  باید بر تابع  $g(x) = \frac{6x - a}{x + 3}$  مماس باشد پس معادلهٔ زیر ریشهٔ مضاعف دارد:

$$\frac{6x - a}{x + 3} = 4x \Rightarrow 6x^2 + 12x = 6x - a \Rightarrow 6x^2 + 6x + a = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 36 - 16a = 0 \Rightarrow a = \frac{9}{4}$$

۷ | ۲ به جای عبارت خواسته شده از معادله آن به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$2f''(x)f'(x) + 2g''(x)g'(x) = \frac{2}{3}(f'''(x) + g'''(x))'$$

$$= \frac{2}{3}(2x^3 - 3 \sin^2 3x + 3x^3 - 3 \cos^2 3x)'$$

$$= \frac{2}{3}(6x^2 - 3) = \frac{2}{3}(15x^2) = 10x^2$$

برای یافتن عبارت خواسته شده در عبارت مشتق عددگذاری می‌کنیم:

$$2f''(1)f'(1) + 2g''(1)g'(1) = 10(1^2) = 10$$

۸ | ۳ باقی‌مانده تقسیم  $f'(x)$  بر  $x+3$  برابر  $f'(-3)$  است.

باقی‌مانده تقسیم  $Q(-x+2)$  بر  $x-5$  برابر ۶ است بنابراین داریم:

$$x = 5 \Rightarrow Q(-3) = 6$$

رابطهٔ تقسیم را برای تابع  $f(x)$  می‌نویسیم:

$$f(x) = (2x^2 + 6x)Q(x) + 4x + 1$$

از طرفین رابطهٔ تقسیم مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = (4x + 6)Q(x) + (2x^2 + 6x)Q'(x) + 4$$

$$x = -3 \Rightarrow f'(-3) = -6Q(-3) + 0 + 4 = -6(6) + 4 = -32$$

۹ | ۱ قبل از مشتق‌گیری ابتدا ضابطهٔ دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  را ساده می‌کنیم.

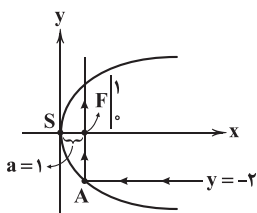
$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x-1}+1)}{1+\sqrt[3]{x-1}} + b = \sqrt[3]{x} + b \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$g(x) = \frac{a \tan \pi x (1 - \tan^2 \pi x)}{(1 + \tan^2 \pi x)(1 + \tan^2 \pi x)} = \frac{a}{2} \sin 2\pi x \cos 2\pi x$$

$$= \frac{a}{4} \sin 4\pi x \Rightarrow g'(x) = a\pi \cos 4\pi x$$

دو تابع در  $x=8$  مماس مشترک دارند (بر هم مماس‌اند) بنابراین داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(8) = g(8) \Rightarrow 2 + b = 0 \Rightarrow b = -2 \\ f'(8) = g'(8) \Rightarrow \frac{1}{12} = a\pi \Rightarrow a = \frac{1}{12\pi} \Rightarrow \frac{b}{a} = -24\pi \end{array} \right.$$



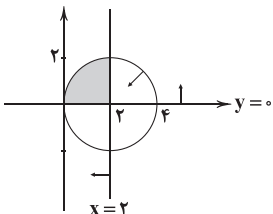
$y^2 = 4x$  سهمی افقی  $S(0, 0) \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$

روی سهمی  $A(x, -2) \Rightarrow (-2)^2 = 4x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, -2)$

بنابراین خط گذرا از دو نقطه  $A(1, -2)$  و  $F(1, 0)$  خط انعکاس خواهد بود  
بنابراین خط بازتاب به صورت  $x = 1$  است.

معادله دایره‌ای به مرکز  $(2, 0)$  و شعاع ۲ به صورت زیر است. **۳ ۲۲**

$y^2 = 4 - (x - 2)^2 \Rightarrow y^2 + (x - 2)^2 = 4$



مساحت هاشور  $= \frac{1}{4} \pi (2)^2 = \pi$

فاصله نقطه  $A(a, b, c)$  از محور  $y$ ها برابر  $\sqrt{a^2 + c^2}$  **۴ ۲۳**

است.

$\sqrt{(m+1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$  توان  $\rightarrow (m+1)^2 = 1$

$\Rightarrow m+1 = \pm 1 \Rightarrow m = 0, m = -2$

معادله پاره خط  $AB$  به صورت  $-3 \leq y \leq 2$  است. **۴ ۲۴**

$|AB|$  قطر وجه است: **۴ ۲۵**

$|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + (-1-m)^2} = \sqrt{2 + (m+1)^2}$

اگر  $a$  را یک یال مکعب در نظر بگیریم:

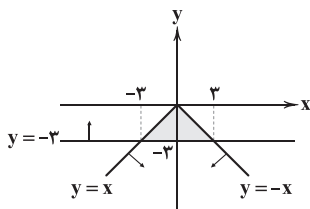
$a^2 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \Rightarrow$  قطر مربع  $= 2$

**توجه:** قطر مربع  $\sqrt{2}$  برابر ضلع است.

$\sqrt{2 + (m+1)^2} = 2 \Rightarrow (m+1)^2 = 2 \Rightarrow m+1 = \pm\sqrt{2}$

$m > 0 \rightarrow m = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow A(1, 2, \sqrt{2} - 1)$

$|OA| = \sqrt{1 + 4 + 2 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{8 - \sqrt{8}}$



**۱ ۲۱**

کل انتخاب‌ها  $|S| = \binom{12}{3} = 220$

**۴ ۱۵**

می‌دانیم اگر از یک خط ۳ نقطه انتخاب شود و به هم وصل کنیم، شکل حاصل مثلث نمی‌شود.

تعداد حالات ۳ نقطه از خطوط افقی  $\binom{3}{1} \binom{4}{3} = 3 \times 4 = 12$

تعداد حالات ۳ نقطه از خطوط عمودی  $\binom{4}{1} \binom{3}{3} = 4$

تعداد حالات ۳ نقطه از خطوط اوریب  $= 4$

تعداد حالاتی که مثلث ساخته نمی‌شود  $|A'| = 12 + 4 + 4 = 20$

$|A| = |S| - |A'| = 220 - 20 = 200$

**۳ ۱۶**

اگر  $x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow 1^2 + x_3 + x_4 = 17 \Rightarrow x_3 + x_4 = 13$

تعداد جواب  $= \binom{13-1}{2-1} = \binom{12}{1} = 12$

اگر  $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 1^2 + 2^2 + x_3 + x_4 = 17 \Rightarrow x_3 + x_4 = 8$

تعداد جواب  $= \binom{8-1}{2-1} = \binom{7}{1} = 7$

اگر  $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2^2 + x_3 + x_4 = 17 \Rightarrow x_3 + x_4 = 8$

تعداد جواب  $= \binom{8-1}{2-1} = \binom{7}{1} = 7$

اگر  $x_1 = x_2 = 2 \Rightarrow 2^2 + x_3 + x_4 = 17 \Rightarrow x_3 + x_4 = 9$

تعداد جواب  $= \binom{9-1}{2-1} = 8$

$\Rightarrow$  تعداد کل جواب‌ها  $= 12 + 7 + 7 = 26$

**۱ ۱۷**

هر جمله بسط  $(a+b+c+d)^6$  به صورت

$a^x b^y c^z d^w$  است که  $x+y+z+w = 6$  و اگر بخواهیم

فاقد  $a$  باشد  $x_1 = 0$  و چنانچه توان  $b$  حداقل ۲ باشد  $x_2 \geq 2$ .

$x_2 + x_3 + x_4 = 6 \quad x_2 \geq 2$

تعداد جواب  $= \binom{6+3-1-2}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$

**۲ ۱۸**

اگر  $\sqrt{x_4} = y_4, \sqrt{x_3} = y_3, \sqrt{x_2} = y_2, \sqrt{x_1} = y_1$

آن‌گاه  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 10$  و چون  $x_1 > 1$  پس  $y_1 = \sqrt{x_1} > 3$  یا  $y_1 \geq 4$  است.

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 10 \quad y_1 \geq 4 \quad y_2 \geq 1 \quad y_3 \geq 1 \quad y_4 \geq 1$

تعداد جواب  $= \binom{10+4-1-4-1-1-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20$

**۱ ۱۹**

$x+y+z < 7 \Rightarrow x+y+z \leq 6 \Rightarrow x+y+z+t = 6$

تعداد جواب  $= \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = 84$

**۳ ۲۰**

$x+y+z+t = 7$

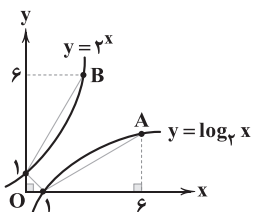
تعداد حالات  $= \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120$



$$\Rightarrow \log_k 30 = \pm 1 \Rightarrow k = 30 \text{ یا } k = \frac{1}{30}$$

$$k = 30 \Rightarrow 2^x + 3^y + 5^z = 3k = 90$$

$$k = \frac{1}{30} \Rightarrow 2^x + 3^y + 5^z = 3k = \frac{1}{10}$$



$$A \left| \begin{matrix} 6 \\ \log_2 6 \end{matrix} \right. \quad B \left| \begin{matrix} \log_2 6 \\ 6 \end{matrix} \right.$$

اکنون مجموع مساحت ۳ مثلث را یافته و مساوی  $\frac{1}{2} \log_2 (2 \times 6^a)$  قرار

می‌دهیم.

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 5 \times \log_2 6 + \frac{1}{2} \times 5 \times \log_2 6 = \frac{1}{2} \log_2 (2 \times 6^a)$$

$$\Rightarrow 1 + 10 \log_2 6 = \log_2 2 + \log_2 6^a$$

$$\Rightarrow \log_2 6^{10} = \log_2 6^a \Rightarrow a = 10$$

۳ ۳۴

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{b(2a^2 - ab - b^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^{1/2}} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow b} \frac{b(2a+b)(a-b)}{(a-b)(a+b)(a^2 + b^2)^{1/2}} = \frac{1}{12}$$

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{b(2a+b)}{(a+b)(a^2 + b^2)^{1/2}} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{b(2b+b)}{(b+b)(b^2 + b^2)^{1/2}} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{3b^2}{4b^2} = \frac{1}{12} \Rightarrow b = 9$$

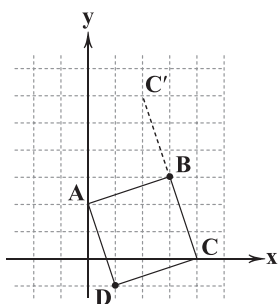
۲ ۳۵

$$y = 1 + \log_4 x \Rightarrow \log_4 x = y - 1 \Rightarrow x = 4^{y-1}$$

$$x^y = 4^6 \Rightarrow (4^{y-1})^y = 4^6 \Rightarrow (y-1)y = 6$$

$$\Rightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \text{ یا } -2$$

۲ ۳۶ مطابق شکل مختصات رأس‌های  $A(0, 2)$  و  $C(4, 0)$  به دست می‌آید و بازتاب یافته نقطه  $C$  نسبت به ضلع  $AB$  نقطه  $C'(2, 6)$  است.



$$|AB| = 0 \Rightarrow A = B$$

۱ ۲۷

$$\begin{cases} a-1=2c \xrightarrow{\times(-2)} -2a+4c=-2 \\ b-c+1=2a+b \Rightarrow 2a+c=1 \\ 4a+b=3a-2b \Rightarrow b=-\frac{a}{3} \end{cases} \Rightarrow \Delta c = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{5}$$

$$2a+c=1 \Rightarrow 2a=1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5} \Rightarrow a=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$b=-\frac{a}{3}=-\frac{1}{5}$$

$$3b-2a-4c=-1$$

۳ ۲۸

$$|AB| = \sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{6}$$

$$|AC| = \sqrt{(2-5)^2 + (1+4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{35}$$

$$|BC| = \sqrt{(3-5)^2 + (0+4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{35})^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{29})^2 \Rightarrow$$

۲ ۲۹ می‌دانید که:

الف) قرینه نقطه  $A = (a, b, c)$  نسبت به محور  $oy$  برابر است با:  $(-a, b, -c)$

ب) تصویر نقطه  $A = (a, b, c)$  بر روی صفحه  $xoy$  برابر است با:  $(a, b, 0)$

$$A = (3, -2, 4) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } oy} A' = (-3, -2, -4)$$

$$A = (3, -2, 4) \xrightarrow{\text{تصویر بر روی صفحه } xoy} A'' = (3, -2, 0)$$

$$A'A'' = \sqrt{(3+3)^2 + (-2+2)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

۴ ۳۰ معادله صفحه‌ای که از نقطه  $A = (2, 3, -4)$  گذشته و

با صفحه  $xoz$  موازی باشد  $y = 3$  می‌باشد که فاصله آن از مبدأ مختصات برابر ۳ است.

۲ ۳۱ می‌دانیم:

$$\text{الف) } \sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \sin(\alpha - 2\pi)$$

$$\Rightarrow \sin 2\pi x = \sin(2\pi x - 2\pi)$$

$$\text{ب) } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\pi(x-1)}{\sin 2\pi(x-1)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin 2\pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x)}{\sin(2\pi x - 2\pi)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2\pi(x-1)(1+x)}{2\pi \sin(2\pi(x-1))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1+x)}{2\pi} = -\frac{1}{\pi}$$

۳ ۳۲

$$2^x = 3^y = 5^z = 30 \Rightarrow x = \log_2 30, y = \log_3 30, z = \log_5 30$$

$$\Rightarrow x = \log_2 k, y = \log_3 k, z = \log_5 k$$

$$k = 30 \Rightarrow k = 30 \cdot \log_2 k + \log_3 k + \log_5 k$$

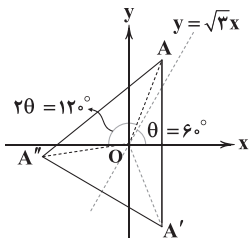
$$\Rightarrow k = 30 \cdot \log_2 k + \log_3 k + \log_5 k \Rightarrow k = 30 \cdot \log_2 k$$

$$\Rightarrow \log_k k = \log_k 30 \cdot \log_k 30 \Rightarrow 1 = (\log_k 30) \log_k 30$$



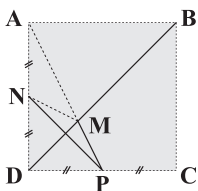
۴۲ ۴ می‌دانیم ترکیب دو بازتاب محوری با محورهای متقاطع، یک دوران است که زاویه آن دو برابر زاویه بین دو خط است.

زاویه بین محور  $x$ ها و خط  $y = \sqrt{3}x$  برابر  $60^\circ$  است و ترکیب بازتاب نسبت به این دو خط، یک دوران به مرکز مبدأ و زاویه  $120^\circ$  است. پس:  $\angle AOA'' = 120^\circ$ . بنابراین اصلاً لازم نیست مختصات نقاط  $A'$  و  $A''$  را به دست آوریم.



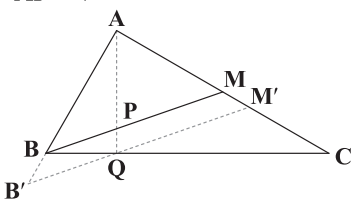
۴۳ ۲ برای پیدا کردن نقطه  $M$  که محیط مثلث  $AMN$  حداقل ممکن باشد، نقطه  $N$  را نسبت به  $BD$  بازتاب می‌دهیم تا  $P$  به دست آید. بدیهی است که  $P$  وسط ضلع  $CD$  است و نقطه  $M$  محل تلاقی  $BD$  و  $AP$  است.

$$\Delta AMB \sim \Delta DMP \Rightarrow \frac{BM}{MD} = \frac{AB}{DP} = \frac{2}{1}$$



۴۴ ۴ در تجانس به مرکز  $A$  و نسبت  $k = \frac{4}{3}$ ، پاره خط  $BM$  روی  $B'M'$  تصویر می‌شود. محل برخورد  $B'M'$  و ضلع  $BC$  نقطه  $Q$  است و طبق تجانس داریم:

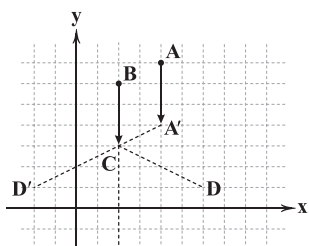
$$\frac{AQ}{AP} = \frac{4}{3} \Rightarrow AP = 3PQ$$



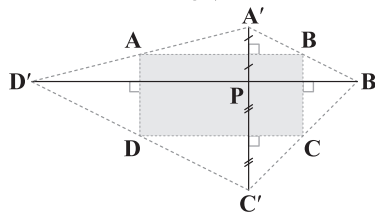
۴۵ ۲ دو نقطه  $B$  و  $C$  به اندازه ۳ واحد در راستای قائم فاصله دارند.

پس با بردار انتقالی به طول ۳ از  $A(4, 4)$  می‌رسیم و برای پیدا کردن نقطه  $C$  باید  $D$  را نسبت به خط  $x=2$  بازتاب دهیم تا  $D'(-2, 1)$  به دست آید. نقطه  $C(2, 3)$  محل برخورد  $A'D'$  با خط  $x=2$  است و طول کوتاه‌ترین مسیر برابر است با:

$$AA' + A'D' = 3 + \sqrt{45} = 3 + 3\sqrt{5} = 3(1 + \sqrt{5})$$



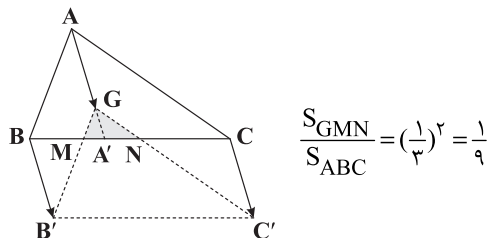
۳۷ ۴ مطابق شکل در چهارضلعی  $A'B'C'D'$  قطرهای با اضلاع مستطیل موازیند و قطرهای چهارضلعی  $A'B'C'D'$  به ترتیب  $A'C' + B'D' = 12$  است. پس:  $B'D' = 2AB = 8$  و  $A'C' = 2AD = 4$



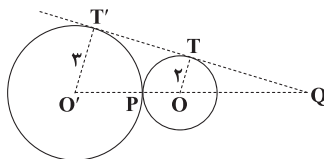
۳۸ ۲ ناحیه مشترک مطابق شکل، مثلث  $GMN$  است که طبق تالس و خاصیت مرکز ثقل مثلث داریم:

$$\frac{GM}{AB} = \frac{GA'}{AA'} = \frac{1}{3}, \quad \frac{GN}{AC} = \frac{GA'}{AA'} = \frac{1}{3}$$

پس در مثلث  $GMN$  اندازه هر ضلع برابر  $\frac{1}{3}$  اضلاع مثلث  $ABC$  است. بنابراین:



۳۹ ۲ نقطه تماس دو دایره، مرکز تجانس معکوس است. اگر  $Q$  مرکز تجانس مستقیم باشد:



$$\frac{QO}{QO'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{QO}{QO + \delta} = \frac{2}{3} \Rightarrow QO = 10$$

$$\Rightarrow PQ = PO + QO = 2 + 10 = 12$$

۴۰ ۳ فاصله مرکز دوران تا نقاط  $A$  و  $B$  برابر است:

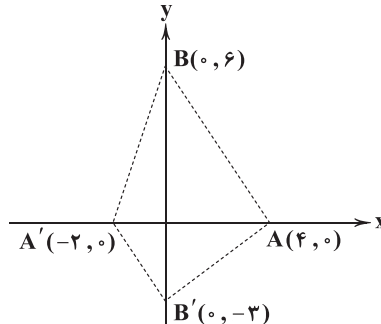
$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(1+2)^2 + (m-1)^2} = \sqrt{(1-m)^2 + (m-\delta)^2}$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 10 = 2m^2 - 12m + 26 \Rightarrow m^2 - 10m + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=8 \end{cases}$$

۴۱ ۲ مختصات نقاط  $A'$  و  $B'$  مطابق شکل روی محورهای  $x$  و  $y$  و به صورت  $A'(-2, 0)$  و  $B'(0, -3)$  به دست می‌آید:

$$S_{ABA'B'} = \frac{AA' \cdot BB'}{2} = \frac{6 \times 9}{2} = 27$$





$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3)$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{36} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{108}$$

و اینک به کمک قاعدهٔ بیز، خواهیم داشت:

$$P(A_2|A) = \frac{P(A_2) \times P(A|A_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{5}{36}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{36} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{108}}$$

$$= \frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{108} + \frac{15}{108} + \frac{5}{108}} = \frac{5}{38} = \frac{15}{38}$$

در تست‌های چهارگزینه‌ای، احتمال درست پاسخ دادن  $\frac{1}{4}$  و

احتمال نادرست پاسخ دادن  $\frac{3}{4}$  است.

این دانش‌آموز قرار است از بین ۶ تست، دقیقاً به ۲ تست پاسخ نادرست بدهد، پس با توجه به مستقل بودن تست‌ها از هم، داریم:

$$P(A) = \binom{6}{2} \left( \frac{3}{4} \right)^2 \left( \frac{1}{4} \right)^4 = \frac{15}{128}$$

پاسخ نادرست به ۲ سؤال از ۶ سؤال

## فیزیک

با توجه به این‌که ضریب شکست محیط شفاف A نسبت به

محیط شفاف B برابر  $\frac{5}{3}$  است، داریم:

$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{5}{3} \quad (1)$$

ضریب شکست محیط شفاف C نسبت به محیط شفاف B نیز برابر  $\frac{3}{5}$  است، یعنی:

$$\frac{n_C}{n_B} = \frac{3}{5} \quad (2)$$

به کمک روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{n_A}{n_C} = \frac{n_A}{n_B} \times \frac{n_B}{n_C} \Rightarrow \frac{n_A}{n_C} = \frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = 1 \quad (*)$$

با استفاده از تعریف ضریب شکست یک محیط داریم:

$$v = \frac{c}{n} \Rightarrow \frac{v_C}{v_A} = \frac{n_A}{n_C} \xrightarrow{(*)} \frac{v_C}{v_A} = 1$$

می‌دانیم هرگاه پرتوی نوری از هوا وارد محیط شفاف دیگری

شود، پرتو شکست می‌یابد و به خط عمود بر سطح جداکنندهٔ دو محیط نزدیک می‌شود، بنابراین:

$$\hat{i} = 53^\circ, \hat{r} = 37^\circ$$

$$\hat{r} = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$$

با توجه به قانون شکست اسنل داریم:

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\sin 53^\circ}{\sin 37^\circ} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow n_2 = \frac{\sin 53^\circ}{\sin 37^\circ} = \frac{0.8}{0.6} = \frac{4}{3} \Rightarrow n_2 = \frac{4}{3}$$

۴۴ اگر پیشامد A را پیشامد خروج حداقل یک گوی قرمز در نظر

بگیریم، پیشامد A' پیشامد آن است که هیچ گوی قرمزی خارج نشود و این یعنی هر سه گوی خارج شده آبی یا زرد باشند، پس داریم:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{6}{3}}{\binom{12}{3}} = 1 - \frac{20}{220} = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

۴۷ اگر اعداد بخش‌پذیر بر ۴ را با A و اعداد بخش‌پذیر بر ۵ را با B

نمایش دهیم، داریم:

$$n(S) = 350 - 50 = 300$$

$$n(A) = \left[ \frac{350}{4} \right] - \left[ \frac{50}{4} \right] = 87 - 12 = 75$$

$$n(B) = \left[ \frac{350}{5} \right] - \left[ \frac{50}{5} \right] = 70 - 10 = 60$$

$$n(A \cap B) = \left[ \frac{350}{20} \right] - \left[ \frac{50}{20} \right] = 17 - 2 = 15$$

و در نهایت، احتمال این‌که نه A رخ بدهد و نه B، برابر است با:

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B') = 1 - \frac{75}{300} - \frac{60}{300} + \frac{15}{300} = 1 - \frac{120}{300} = \frac{180}{300} = \frac{3}{5}$$

۴۸ «اختلاف برآمدها ۲ باشد» را فضای نمونه‌ای کاهش یافته در

نظر می‌گیریم و داریم:

$$S = \{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4)\}$$

$$\Rightarrow n(S) = 8$$

و پیشامد «مجموع برآمدها بزرگ‌تر از ۵» عبارت است از:

$$A = \{(2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4)\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 6$$

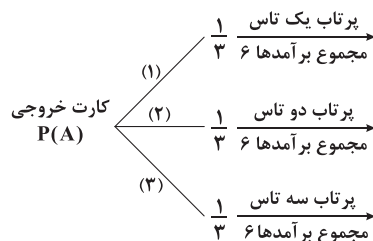
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

بنابراین احتمال مورد نظر، برابر است با:

۴۹ ابتدا با توجه به قانون احتمال کل، اگر  $A_1$  پیشامد برداشتن

کارت با شماره ۱ باشد، داریم:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$



$$\xrightarrow{(1)} \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} : \frac{1}{6} = P(A|A_1)$$

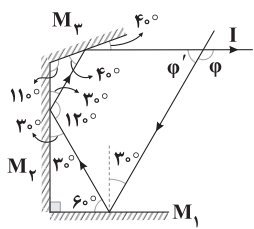
$$\xrightarrow{(2)} \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\} : \frac{5}{36} = P(A|A_2)$$

$$\xrightarrow{(3)} \{(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 2, 2)\}$$

$$: \frac{10}{216} = \frac{5}{108} = P(A|A_3)$$



۵۷ ۴ با توجه به قانون بازتاب عمومی، زاویه  $\varphi'$  را به دست می‌آوریم:



$$\varphi' + 110^\circ + 120^\circ + 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow \varphi' = 8^\circ$$

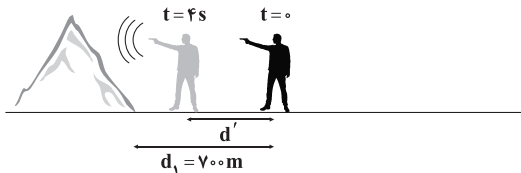
$\varphi$  مکمل زاویه  $\varphi'$  است، پس داریم:

$$\varphi = 180^\circ - 8^\circ = 172^\circ$$

**دقت کنید:** مجموع زوایای داخلی مثلث  $180^\circ$  و مجموع زوایای داخلی یک چهارضلعی  $360^\circ$  است.

۵۸ ۲ برای کوه نزدیک‌تر:

اگر جابه‌جایی شخص به سمت کوه نزدیک‌تر را تا لحظه شنیدن پژواک اول  $d'$  و فاصله اولیه شخص از کوه نزدیک‌تر را  $d_1$  بنامیم، داریم:



$$d' = vt = 10 \times 4 = 40 \text{ m}$$

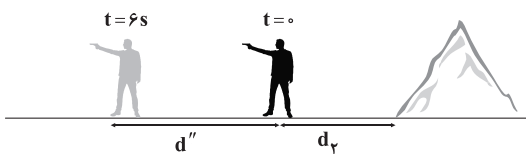
پس در این مدت مسافت طی شده توسط صوت به اندازه  $d'$  کم‌تر از  $2d_1$  است، بنابراین:

$$\Delta x = v\Delta t = 2d_1 - d' = v\Delta t \Rightarrow 2 \times 700 - 40 = v \times 4$$

$$\Rightarrow v = \frac{1360}{4} = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

برای کوه دورتر:

اگر جابه‌جایی شخص تا شنیدن پژواک دوم را  $d''$  و فاصله اولیه شخص از کوه دورتر را  $2d_2$  بنامیم، داریم:



$$d'' = v\Delta t = 6 \times 10 = 60 \text{ m}$$

مسافتی که صوت طی می‌کند تا صدای پژواک دوم شنیده شود، به اندازه  $d''$  از  $2d_2$  بیشتر است، بنابراین:

$$2d_2 + d'' = v\Delta t \Rightarrow 2d_2 + 60 = 6 \times 340$$

$$\Rightarrow 2d_2 = 1980 \Rightarrow d_2 = 990 \text{ m}$$

بنابراین فاصله بین دو کوه برابر است با:

$$d = d_1 + d_2 \Rightarrow d = 700 + 990 = 1690 \text{ m}$$

۵۹ ۴ تنها عبارت «الف» درست است.

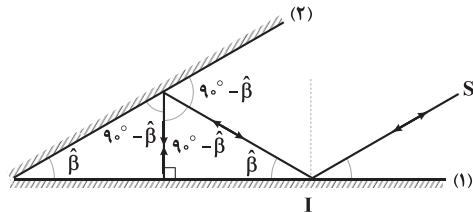
**بررسی عبارتهای نادرست:**

(ب) پدیده پراش می‌تواند برای امواج مکانیکی یا الکترومغناطیسی رخ دهد.  
(ج) اگر آزمایش ینگ را به جای هوا در آب انجام دهیم، با توجه به کاهش سرعت و ثابت ماندن بسامد با استفاده از رابطه  $v = \lambda f$  می‌توان گفت که طول موج کاهش می‌یابد. از طرفی پهنای نوارهای روشن و تاریک متناسب با طول موج است، بنابراین نوارها باریک‌تر می‌شوند.

۵۳ ۱ با توجه به قضیه خطوط موازی و مورب، چون پرتو SI موازی

آینه (۲) است، اگر زاویه بین دو آینه برابر  $\beta$  باشد، زاویه پرتو SI با سطح آینه (۱) نیز برابر  $\beta$  خواهد بود.

پرتو موردنظر ۵ بار به سطح آینه‌ها برخورد کرده است، بنابراین همان‌طور که در شکل زیر مشاهده می‌کنید، حتماً در سومین برخورد به سطح آینه (۱) به‌طور عمود تابیده است و در نتیجه روی خودش بازتابیده است، بنابراین داریم:

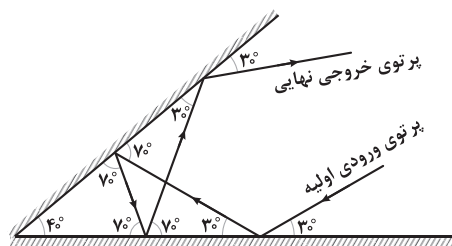


$$3(90^\circ - \beta) = 180^\circ$$

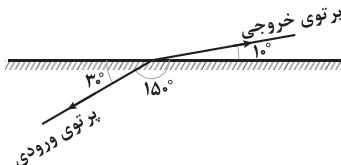
$$\Rightarrow 90^\circ - \beta = 60^\circ \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

۵۴ ۴ می‌دانیم شرط خروج یک پرتو از مجموعه دو آینه این است که

زاویه پرتو با سطح یکی از دو آینه کوچک‌تر یا مساوی زاویه بین دو آینه شود، بنابراین مسیر این پرتو در مجموعه دو آینه به شکل زیر خواهد بود:



برای محاسبه زاویه بین پرتوی ورودی اولیه و پرتوی خروجی نهایی، هر دو پرتو را از یک نقطه رسم می‌کنیم:



$$\text{زاویه بین دو پرتو} = 15^\circ + 1^\circ = 16^\circ$$

۵۵ ۴ فاصله بین دو جبهه متوالی برابر طول موج است، بنابراین برای

محاسبه  $\alpha$  از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} \xrightarrow{\lambda = \frac{v}{f}} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \Rightarrow \frac{7/2}{6} = \frac{\sin \alpha}{\sin 30^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = 0.6 = 37^\circ$$

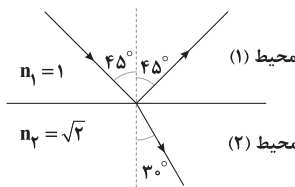
۵۶ ۳ با توجه به قانون شکست اسنل داریم:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\sin \theta_1}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \theta_1 = 45^\circ$$

زاویه بازتاب با زاویه تابش برابر است، بنابراین زاویه بین پرتو بازتاب و شکست

$$180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$$

برابر است:





بنابراین با توجه به قانون شکست اسنل و روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{\sin(\theta_1 + 3^\circ)}{\sin \theta_1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_1 = 3^\circ$$

با  $2^\circ$  درجه دوران ساعتگرد، زاویه پرتو تابش با سطح آینه  $2^\circ$

درجه کاهش می‌یابد و به  $15^\circ$  می‌رسد، بنابراین زاویه بین پرتو تابش و بازتابش به صورت زیر می‌شود:

$$\hat{\alpha} + 15^\circ + 15^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{\alpha} = 150^\circ$$

طبق تعریف ضریب شکست داریم:

$$n = \frac{c}{v} \xrightarrow{\text{ثابت: } c} \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

جابه‌جایی پرتو در هر محیط از رابطه  $\Delta x = v \Delta t$  قابل محاسبه است، بنابراین شیشه را محیط (۱) و آب را محیط (۲) در نظر می‌گیریم و رابطه نسبتی زیر را می‌نویسیم:

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{v_2}{v_1} \times \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{n_1}{n_2} \times \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}$$

بازه‌های زمانی با هم برابر می‌باشند و  $n_2 = \frac{4}{3}$ ،  $n_1 = \frac{3}{2}$  و  $\Delta x_1 = 16 \text{ cm}$  می‌باشد.

$$\frac{\Delta x_2}{16} = \frac{3}{4} \times 1 \Rightarrow \Delta x_2 = 12 \text{ cm}$$

ابتدا زاویه تابش و شکست را محاسبه می‌کنیم. زاویه تابش  $3^\circ$  درجه و زاویه شکست برابر  $53^\circ$  درجه می‌باشد. با توجه به قانون شکست عمومی داریم:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} \xrightarrow{\lambda = \frac{v}{f} \text{ ثابت: } f} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{\sin 53^\circ}{\sin 3^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{0.8}{0.05} = 16 \Rightarrow \lambda_2 = 16 \lambda_1$$

درصد تغییرات طول موج برابر است با:

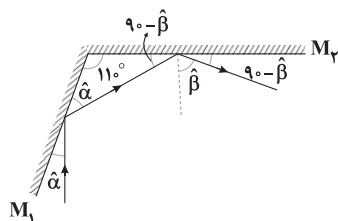
$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \times 100 = \frac{16\lambda_1 - \lambda_1}{\lambda_1} \times 100 = 0.16 \times 100 = 16\%$$

بنابراین طول موج  $16\%$  درصد افزایش می‌یابد.

این اتفاق همان پدیده سراب می‌باشد که به علت اختلاف دما و ضریب شکست لایه‌های هوا به وجود می‌آید، بنابراین هر چه بالاتر برویم، دمای هوا کاهش می‌یابد.

برای حل این سؤال، زوایای مثلث تشکیل شده را محاسبه می‌کنیم و به کمک این نکته که مجموع زوایای داخلی مثلث  $180^\circ$  درجه است، رابطه بین  $\alpha$  و  $\beta$  را محاسبه می‌کنیم.

$$90^\circ - \hat{\beta} + \hat{\alpha} + 11^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{\alpha} - \hat{\beta} = -2^\circ$$

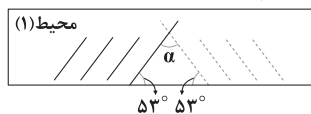


زاویه بین جبهه تابش شده و سطح جداکننده دو محیط هم‌اندازه زاویه تابش و زاویه بین جبهه موج شکسته شده و سطح جداکننده دو محیط هم‌اندازه زاویه شکست است، بنابراین  $\theta_1 = 53^\circ$  است.

طبق اطلاعات داده شده در سؤال داریم:  $v_2 = v_1 - \frac{25}{100} v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{3}{4} v_1$  در نتیجه با استفاده از قانون شکست اسنل داریم:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{\sin \theta_2}{\sin 53^\circ} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \theta_2 = 0.6 \Rightarrow \theta_2 = 37^\circ$$

زاویه بین جبهه‌های موج فرودی با مرز جداکننده دو محیط هم‌اندازه زاویه بین جبهه‌های موج بازتاب شده با مرز جداکننده دو محیط است. از آن جا که مجموع زوایای داخلی مثلث  $180^\circ$  است، داریم:

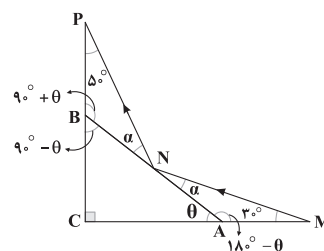


$$\alpha = 180^\circ - (2 \times 53^\circ) = 74^\circ$$

حالا نسبت  $\frac{\alpha}{\theta_2}$  را به دست آوریم:

$$\frac{\alpha}{\theta_2} = \frac{74^\circ}{37^\circ} = 2$$

سؤال، زاویه بین آینه و سطح افقی، یعنی  $\theta$  را می‌خواهد، بنابراین کافی است تا دیگر زوایای مجهول را مطابق شکل زیر برحسب  $\theta$  به دست آوریم:



$$\Delta MAN: \alpha + (180^\circ - \theta) + 3^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \theta - 3^\circ \quad (*)$$

$$\Delta BPN: \alpha + (90^\circ + \theta) + 5^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \theta = 40^\circ \xrightarrow{(*)} (\theta - 3^\circ) + \theta = 40^\circ$$

$$\Rightarrow 2\theta = 43^\circ \Rightarrow \theta = 21.5^\circ$$

ابتدا تندی موج را در مسیر OB (محیط شفاف دوم) محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{0.8}{0.05} = \frac{v_2}{20} \Rightarrow v_2 = 20 \times \frac{0.8}{0.05} = 32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

سپس مدت زمانی را که طول می‌کشد تا موج مسیره‌های OA و OB را طی کند، محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Delta t_1 = \frac{OA}{v_1} = \frac{\lambda}{20} = \frac{4}{10} \text{ s} \\ \Delta t_2 = \frac{OB}{v_2} = \frac{\lambda}{32} = \frac{1}{8} \text{ s} \end{cases} \Rightarrow \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 0.4 + 0.125 = 0.525 \text{ s}$$

طبق گفته سؤال، تندی پرتوی نور در محیط شفاف دوم  $\sqrt{3}$

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{3} \quad (1)$$

برابر شده است، بنابراین:

از طرفی تندی نور در محیط دوم بیشتر از محیط اول بوده است، پس نتیجه می‌گیریم که محیط دوم رقیق تر است، بنابراین زاویه شکست از زاویه تابش بزرگ تر است. از

طرفی پرتو  $3^\circ$  منحرف شده است. بنابراین:

$$\theta_2 = \theta_1 + 3^\circ \quad (2)$$





بنابراین اندازه نیروی خالصی که بر روی جسم کار انجام می‌دهد، برابر است با:

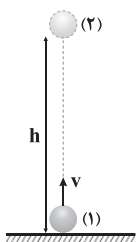
$$F_t = F_1 + F_2 = 8 + 12 = 20 \text{ N}$$

بنابراین کار کل انجام‌شده بر روی جسم برابر است با:

$$d = 12 \text{ m} \quad F_t = 20 \text{ N}$$

$$W_t = F_t d \cos \theta = 20 \times 12 \times \cos 18^\circ \Rightarrow W_t = -240 \text{ J}$$

۷۷ اگر سطح زمین را مبدأ پتانسیل گرانشی در نظر بگیریم، در حالت اول با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی داریم:



$$E_1 = E_2$$

$$\Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = mgh \Rightarrow v^2 = 2gh \quad (1)$$

در حالت دوم با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$E'_1 = E'_2 \Rightarrow U'_1 + K'_1 = U'_2 + K'_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v'^2 = mgh'$$

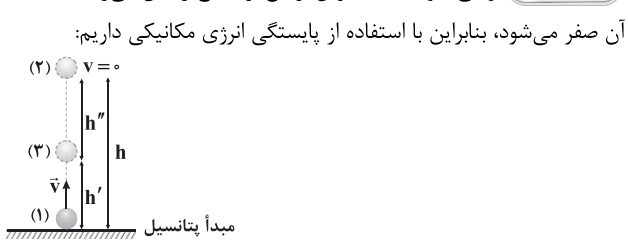
$$h' = h + \frac{69}{100} h = 1.69h \rightarrow v'^2 = 2g \times (1.69h)$$

$$\Rightarrow v'^2 = 2 \times 1.69gh \quad (2)$$

با تقسیم دو رابطه (۱) و (۲) بر هم داریم:

$$\frac{v'^2}{v^2} = \frac{1}{1.69} \Rightarrow \frac{v'}{v} = \frac{1}{1.3} \Rightarrow \frac{v'}{v} = 1/3 \Rightarrow v' = 1/3 v$$

۷۸ وقتی گلوله به بیشترین ارتفاع از سطح زمین می‌رسد، تندی آن صفر می‌شود، بنابراین با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی داریم:



$$E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 = mgh$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 1000 = 1000 \times h \Rightarrow h = 5 \text{ m}$$

حال ارتفاع گلوله از سطح زمین در لحظه‌ای که انرژی جنبشی آن ۷/۵ J است را محاسبه می‌کنیم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 = mgh' + 7.5 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 1000 \times 100 = 1000 \times h' + 7.5$$

$$\Rightarrow 10 = 2h + 7.5 \Rightarrow 2.5 = 2h$$

$$\Rightarrow h = \frac{2.5}{2} = 1.25 \text{ m}$$

بنابراین فاصله گلوله تا نقطه اوج برابر است با:

$$h'' = 5 - 1.25 = 3.75 \text{ m}$$

۶۹ تحلیل نقش پراش مبتنی بر بحث تداخل امواج است و پدیده

پراش برای همه انواع موج اتفاق می‌افتد.

۷۰ در رادار دوپلری برای مکان‌یابی پژواکی از امواج

الکترومغناطیسی استفاده می‌شود.

۷۱ طول موج عبوری به دلیل افزایش سرعت، افزایش یافته اما

طول موج پرتو بازتاب‌شده ثابت می‌ماند.

۷۲ با تغییر محیط، بسامد موج ثابت می‌ماند، بنابراین:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{120}{40} \Rightarrow \lambda_2 = 360 \text{ cm}$$

توجه کنید که فاصله یک قله از دره متوالی بعد از آن برابر با نصف طول موج

$$\frac{\lambda_2}{2} = 180 \text{ cm}$$

است، بنابراین:

۷۳ فاصله بین دو جبهه موج متوالی برابر با طول موج آن موج

است، بنابراین طبق تعریف ضریب شکست داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \\ \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad \lambda_2 = \frac{80}{100} \lambda_1 \rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{80}{100}$$

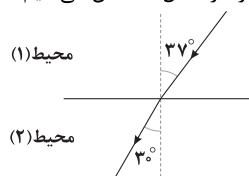
$$\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{100}{80} = \frac{5}{4}$$

۷۴ توجه کنید که در امواج مکانیکی، سرعت هنگام ورود از هوا به

آب افزایش یافته، پس زاویه شکست به اندازه ۱۵° از زاویه تابش بزرگ‌تر است، بنابراین طبق قانون شکست عمومی داریم:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{\sin 6^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$$

۷۵ ابتدا زاویه تابش و زاویه شکست را در شکل مشخص می‌کنیم:



با استفاده از قانون شکست اسنل داریم:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin r}{\sin i}$$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 37^\circ} = \frac{1}{\frac{6}{12}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

بنابراین طبق تعریف ضریب شکست داریم:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{6}{5}$$

۷۶ اگر راستای نیرو بر راستای جابه‌جایی عمود باشد، کار آن نیرو

صفر است. چون جابه‌جایی جسم در راستای محور X است، مؤلفه‌های قائم نیروها بر روی جسم کاری انجام نمی‌دهند، بنابراین نیروهایی که بر روی جسم کار انجام می‌دهند، به صورت زیر است:





$$E_B - E_A = W_{f_k} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh = W_{f_k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 3 \times 16 - 3 \times 10 \times 3 = W_{f_k}$$

$$\Rightarrow 24 - 90 = W_{f_k}$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = -66 \text{ J}$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = -f_k d \Rightarrow -66 = -f_k \times 6 \Rightarrow f_k = 11 \text{ N}$$

۸۴ ۳ جسم با تندی ثابت حرکت می‌کند، بنابراین در مدت ۱۰ ثانیه، ۲۰ متر جابه‌جا می‌شود. کار کل نیروهای وارد بر جسم برابر تغییرات انرژی جنبشی جسم است، در نتیجه داریم:

$$W_t = K_f - K_i \xrightarrow{K_f = K_i} W_F + W_{f_k} = 0$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = -W_F \Rightarrow W_{f_k} = -Fd \cos \theta$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = -30 \times 20 \times \cos 0^\circ = -600 \text{ J} = -0.6 \text{ kJ}$$

۸۵ ۱ کار نیروی وزن برابر با منفی تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی جسم در طی آن جابه‌جایی است، بنابراین:

$$W_{mg} = -\Delta U \Rightarrow W_{mg} = -(U_B - U_A)$$

$$\frac{W_{mg} = -40 \text{ J}}{U_A = 15 \text{ J}} \rightarrow -40 = -(U_B - 15) \Rightarrow 40 = U_B - 15$$

$$\Rightarrow U_B = 55 \text{ J}$$

۸۶ ۲ می‌دانیم توان برابر با حاصل تقسیم انرژی آزاد شده بر مدت‌زمان آزادسازی انرژی است، یعنی:

$$P = \frac{U}{\Delta t} \quad (1)$$

توان برابر حاصل ضرب اختلاف پتانسیل الکتریکی در جریان نیز هست، یعنی:

$$P = VI \quad (2)$$

از ترکیب روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$VI = \frac{U}{\Delta t} \Rightarrow I = \frac{U}{V \Delta t} \quad (3)$$

$$\Rightarrow I = \frac{4/5 \times 10^8}{2 \times 10^6 \times 0.4} = 5/625 \times 10^2 = 562/5 \text{ A}$$

۸۷ ۳ می‌دانیم تغییرات مقاومت الکتریکی در اثر تغییرات دما از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\Delta R = R_0 \alpha \Delta \theta$$

تغییرات مقاومت الکتریکی رسانای اول را با  $\Delta R_1$  و تغییرات مقاومت الکتریکی رسانای دوم را با  $\Delta R_2$  نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$\Delta R_1 = R_0 \alpha \Delta \theta$$

$$\Delta R_2 = 3R_0 (\alpha \Delta \theta) = 9R_0 \alpha \Delta \theta$$

در حالت مقایسه‌ای می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta R_2}{\Delta R_1} = \frac{9R_0 \alpha \Delta \theta}{R_0 \alpha \Delta \theta} \Rightarrow \frac{\Delta R_2}{\Delta R_1} = 9 \Rightarrow \frac{R' - 3R_0}{4R_0 - R_0} = 9 \Rightarrow \frac{R' - 3R_0}{3R_0} = 9$$

$$\Rightarrow R' - 3R_0 = 27R_0 \Rightarrow R' = 30R_0 \Rightarrow \frac{R_0}{R'} = \frac{1}{30}$$

۷۹ ۲ چون جسم به نقطه اولیه‌اش بازگشته، ارتفاع آن از سطح زمین و در نتیجه انرژی پتانسیل گرانشی آن تغییر نکرده است و داریم:

$$\Delta K + \Delta U = \Delta E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta E$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times m(v^2 - v_0^2) = \Delta E \Rightarrow \frac{1}{2} \times 0.2 \times (400 - v_0^2) = -4/4$$

$$\Rightarrow 400 - v_0^2 = -44 \Rightarrow v_0^2 = 400 + 44 \Rightarrow v_0 = \sqrt{444} = 2\sqrt{111} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۸۰ ۳ با توجه به نمودار سؤال اگر تندی جسم  $A$ ،  $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  و تندی جسم  $B$ ،  $24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  باشد انرژی جنبشی دو جسم با هم برابر می‌شود، بنابراین:

$$K_A = K_B \Rightarrow \frac{1}{2}m_A v_A^2 = \frac{1}{2}m_B v_B^2$$

$$\Rightarrow m_A \times 400 = m_B \times 24 \times 24$$

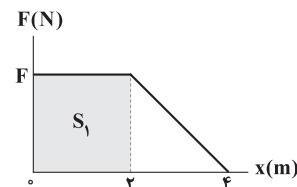
$$\Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{24 \times 24}{400} = \frac{6 \times 24}{100} = \frac{144}{100} = 1.44$$

۸۱ ۴ عبارت‌های «ب»، «ج» و «د» درست هستند.

### بررسی عبارت نادرست:

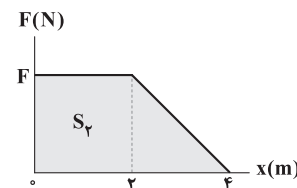
الف) کار نیروی وزن در جابه‌جایی به سمت بالا همواره منفی است، زیرا زاویه بین نیروی وزن و بردار جابه‌جایی جسم برابر با  $180^\circ$  است، بنابراین  $\cos \theta < 0$  است.

۸۲ ۲ سطح زیر نمودار نیرو - مکان بیانگر کار انجام شده توسط نیرو است. کار انجام شده توسط این نیرو در جابه‌جایی از مکان  $x = 0$  تا  $x = 2 \text{ m}$  برابر است با:



$$W_1 = F \times 2 = 2F$$

کار انجام شده توسط این نیرو در جابه‌جایی از مکان  $x = 0$  تا  $x = 4 \text{ m}$  برابر است با:

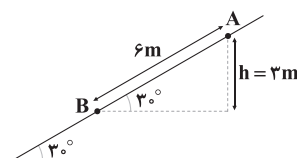


$$W_2 = \frac{4+2}{2} \times F = 3F$$

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{2F}{3F} = \frac{2}{3}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

۸۳ ۲ سطح مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را نقطه  $B$  در نظر می‌گیریم:





بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\varepsilon_2 I - r_2 I^2}{\varepsilon_1 I + r_1 I^2} = \frac{I(\varepsilon_2 - r_2 I)}{I(\varepsilon_1 + r_1 I)} = \frac{\varepsilon_2 - r_2 I}{\varepsilon_1 + r_1 I}$$

$$\frac{\varepsilon_2 = 8V, r_2 = 1/2\Omega}{\varepsilon_1 = 12V, r_1 = 1/2\Omega, I = 0.75A} \rightarrow$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{8 - (1/2 \times 0.75)}{12 + (1/2 \times 0.75)} = \frac{8 - 0.375}{12 + 0.375} = \frac{7.625}{12.375} = \frac{71}{129}$$

۹۱) ابتدا به کمک قانون اهم، مقاومت الکتریکی ماشین حساب را

محاسبه می‌کنیم:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{3V}{0.6A} \rightarrow R = \frac{3}{0.6} = 5\Omega$$

ولتاژ ثانویه باتری، ۳۰ درصد کم‌تر از ولتاژ اولیه آن است، بنابراین:

$$V_2 = V_1 - \frac{30}{100} V_1 = V_1 - 0.3 V_1 = 0.7 V_1 \Rightarrow V_2 = 0.7 \times 3 = 2.1V$$

اندازه مقاومت وسیله الکتریکی تغییر نمی‌کند، بنابراین در حالت ثانویه داریم:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow I_2 = \frac{V_2}{R} = \frac{2.1}{5} = 0.42A$$

بنابراین می‌توان برای محاسبه درصد تغییرات بار عبوری نوشت:

$$\frac{\Delta q}{q_1} \times 100 = \frac{q_2 - q_1}{q_1} \times 100 = \frac{q = I \Delta t}{q_1} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta q}{q_1} \times 100 = \frac{0.42t - 0.6t}{0.6t} \times 100 = -\frac{0.18}{0.6} \times 100 = -30\%$$

بنابراین مقدار بار الکتریکی عبوری ۳۰ درصد کاهش می‌یابد.

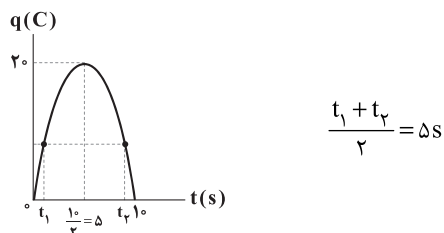
۹۲) جریان متوسط گذرنده از یک رسانا از رابطه زیر به دست

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad \text{می‌آید:}$$

با توجه به رابطه فوق، بدیهی است جریان متوسط عبوری از سطح مقطع یک رسانا زمانی صفر است که تغییرات بار الکتریکی گذرنده از این مقطع رسانا برابر صفر باشد، یعنی:

$$\Delta q = 0 \Rightarrow q_2 - q_1 = 0 \Rightarrow q_2 = q_1$$

با توجه به شکل زیر خواهیم داشت:

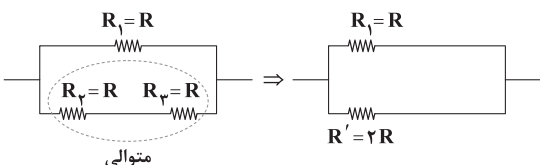


با توجه به گزینه‌ها، تنها مقادیر داده شده در گزینه (۳) در شرایط فوق صدق می‌کند.

$$\begin{cases} t_1 = 2s \\ t_2 = 8s \end{cases} \Rightarrow \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{2 + 8}{2} = \frac{10}{2} = 5s = \Delta s$$

۹۳) هر سه مقاومت، مشابه هستند. با فرض این‌که اندازه هر یک از

مقاومت‌ها برابر R باشد، آن‌گاه داریم:



۸۸) با کاهش مقاومت متغیر  $R_1$ ، مقاومت معادل مدار نیز کاهش

می‌یابد و در نتیجه طبق رابطه  $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$ ، با کاهش  $R_{eq}$  (مقاومت

معادل مدار)، جریان عبوری از مولد (I)، افزایش می‌یابد.

آمپرسنج ایده‌آل، جریان عبوری از مقاومت  $R_p$  را نشان می‌دهد. ضمناً اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت  $R_p$  با اختلاف پتانسیل دو سر باتری برابر است، بنابراین:

$$V_p = \varepsilon - rI \quad (1)$$

طبق قانون اهم و رابطه (۱) نتیجه می‌شود که جریانی که آمپرسنج ایده‌آل

$$I_p = \frac{V_p}{R_p} = \frac{\varepsilon - rI}{R_p} \quad (2)$$

نشان می‌دهد، برابر است با:

طبق رابطه (۲)، اگر باتری ایده‌آل باشد ( $r=0$ )، جریان عبوری از آمپرسنج ایده‌آل بدون تغییر خواهد ماند، ولی اگر باتری ایده‌آل نباشد، یعنی  $r \neq 0$  باشد، با افزایش جریان عبوری از مدار، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر باتری و در نتیجه اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت  $R_p$  کاهش می‌یابد، بنابراین آمپرسنج ایده‌آل عدد کوچک‌تری را نشان خواهد داد.

بنابراین بسته به آرمانی بودن یا نبودن باتری، عدد نشان داده شده توسط آمپرسنج ایده‌آل ممکن است ثابت بماند یا کاهش یابد.

۸۹) می‌دانیم مقاومت هر رسانا به شکل هندسی رسانا وابسته است

$$\text{و از رابطه } R = \rho \frac{L}{A} \text{ به دست می‌آید.}$$

مساحت سطح مقطع هر سیم را به دست می‌آوریم:

$$A_A = \pi r^2 = \pi \times \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi (\text{mm}^2)$$

$$A_B = \pi \times (R_{\text{داخلی}}^2 - R_{\text{خارجی}}^2) = \pi \times (3^2 - 2^2)$$

$$\Rightarrow A_B = \pi \times (9 - 4) = 5\pi (\text{mm}^2)$$

بنابراین:

$$R = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \frac{R_B}{R_A} = \frac{\rho_B}{\rho_A} \times \frac{L_B}{L_A} \times \frac{A_A}{A_B}$$

$$\frac{\rho_B = 6\rho_A, L_B = L_A}{A_A = \pi (\text{mm}^2), A_B = 5\pi (\text{mm}^2)} \rightarrow \frac{R_B}{R_A} = \frac{6\rho_A}{\rho_A} \times \frac{L_A}{L_A} \times \frac{\pi}{5\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{R_B}{R_A} = 6 \times 1 \times \frac{1}{5} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{R_B}{R_A} = \frac{6}{5}$$

۹۰) ابتدا جریان عبوری از مدار را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - \varepsilon_1}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2 + r_3}$$

$$\Rightarrow I = \frac{(10 + 8) - 12}{2/2 + 2/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2} = \frac{6}{8} = 0.75A$$

چون جهت جریان پادساعتگرد است، بنابراین باتری با نیرو محرکه  $\varepsilon_1$  مصرف‌کننده و باتری‌ها با نیروهای محرکه  $\varepsilon_2$  و  $\varepsilon_3$  تولیدکننده هستند.

توان مصرفی توسط باتری با نیرو محرکه  $\varepsilon_1$  برابر خواهد بود با:

$$P_1 = \varepsilon_1 I + r_1 I^2$$

هم‌چنین توان تولیدی توسط باتری با نیرو محرکه  $\varepsilon_2$  برابر است با:

$$P_2 = \varepsilon_2 I - r_2 I^2$$



با توجه به رابطه توان داریم:

$$\begin{cases} P_1 = \frac{V_1^2}{R_1} = \frac{V_1^2}{R} \\ P' = \frac{V'^2}{R'} = \frac{V'^2}{2R} \end{cases}$$

$$\frac{V_1 = V'}{P'} = \frac{2R}{R} = 2 \Rightarrow \frac{P_1}{P'} = 2 \Rightarrow P' = 30 \text{ W}$$

بنابراین جمع توان مقاومت شاخه پایینی و مقاومت شاخه بالایی برابر با توان مصرفی مدار است، در نتیجه داریم:

$$P_{\text{کل}} = P_{\text{شاخه پایینی}} + P_{\text{شاخه بالایی}} = P_1 + P' = 60 + 30 = 90 \text{ W}$$

رابطه توان مصرفی یک رسانا برحسب اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر آن و مقاومت الکتریکی آن به صورت زیر است:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

با توجه به این که در حالت دوم، لامپ هیچ تغییری نکرده است و از همان لامپ قبلی استفاده کرده ایم، پس مقاومت ثابت می ماند ( $R_1 = R_2$ ) و داریم:

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \times \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{R_1 = R_2}{V_1 = 200 \text{ V}, V_2 = 250 \text{ V}} \Rightarrow$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{250}{200}\right)^2 \times 1 = \left(\frac{250}{200}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow P_2 = \frac{25}{16} P_1$$

درصد تغییرات توان لامپ برابر است با:

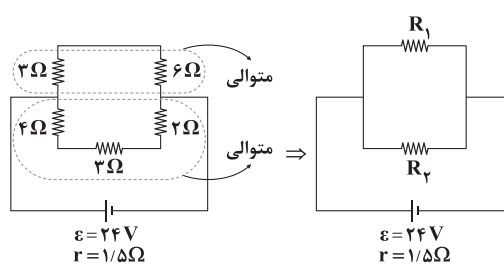
$$\text{درصد تغییرات توان لامپ} = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \times 100 = \frac{\frac{25}{16} P_1 - P_1}{P_1} \times 100 =$$

$$= \frac{9}{16} \times 100 = 56.25\%$$

بنابراین توان لامپ ۵۶/۲۵ درصد افزایش یافته است.

ابتدا مقاومت معادل هر شاخه را محاسبه می کنیم. به شکل

زیر دقت کنید:



$$R_1 = 3 + 6 = 9 \Omega$$

$$R_2 = 2 + 3 + 4 = 9 \Omega$$

شاخه بالایی با مقاومت معادل  $R_1$  موازی شاخه پایینی با مقاومت معادل  $R_2$  است، بنابراین:

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{9 \times 9}{9 + 9} = 4.5 \Omega$$

بازده باتری برحسب درصد برابر است با:

$$\text{بازده برحسب درصد} = \frac{R_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}} + r} \times 100 = \frac{4.5}{4.5 + 1/5} \times 100 =$$

$$= \frac{4.5}{6} \times 100 = 75\%$$

## شیمی

عبارت‌های سوم و چهارم درست هستند. ۲ ۹۶

## بررسی عبارت‌هاک نادرست:

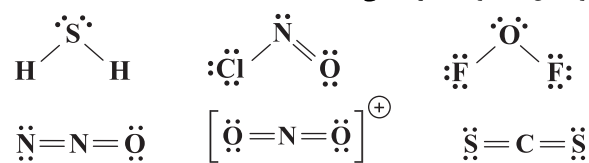
• آنتالپی فروپاشی شبکه نمک خوراکی معادل گرمای مبادله شده

واکنش  $\text{NaCl(s)} \rightarrow \text{Na}^+(\text{g}) + \text{Cl}^-(\text{g})$  است.

• نسبت مقدار بار یون به شعاع آن کمیتی است که می‌تواند برای مقایسه میزان برهم‌کنش یون‌ها به کار رود.

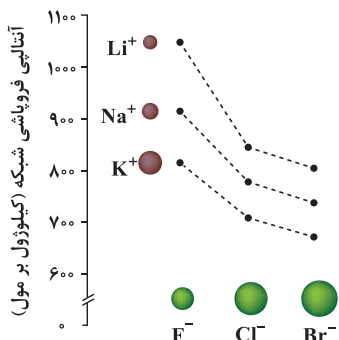
ساختار سه گونه  $\text{NOCl}$ ،  $\text{OF}_2$  و  $\text{H}_2\text{S}$  خمیده (V شکل) ۲ ۹۷

بوده و شکل سه گونه دیگر، خطی است:



مطابق نمودار زیر بیشترین اختلاف میان آنتالپی فروپاشی

شبکه بلور ترکیب‌های داده شده بین LiF و LiCl است. ۴ ۹۸



ترکیبات یونی مانند سدیم نیترات، در حالت مایع انرژی گرمایی

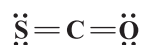
را بیشتر از مواد مولکولی نگه می‌دارند. ۳ ۹۹

## بررسی هر چهار مورد: ۲ ۱۰۰

• در هر سه ترکیب  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ،  $\text{AlF}_3$  و  $\text{MgO}$ ، کاتیون و آنیون دارای  $10^-$  الکترون بوده و مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه بلوری آن‌ها نیز درست آمده است.• در هر کدام از سه ترکیب  $\text{KCl}$ ،  $\text{K}_2\text{S}$  و  $\text{CaS}$ ، کاتیون و آنیون دارای  $18^-$  الکترون هستند و مقایسه آنتالپی فروپاشی شبکه بلوری آن‌ها نیز درست آمده است.• در هر کدام از ۳ ترکیب  $\text{KCl}$ ،  $\text{RbBr}$  و  $\text{CsI}$ ، کاتیون و آنیون، هم الکترون هستند و مقایسه میان آنتالپی فروپاشی شبکه بلور آن‌ها به صورت  $\text{KCl} > \text{RbBr} > \text{CsI}$  درست است.• در هیچ‌کدام از سه ترکیب  $\text{FeBr}_2$ ،  $\text{CuBr}$  و  $\text{ZnBr}_2$ ، کاتیون و آنیون، هم الکترون نیستند.

هر چهار عبارت پیشنهادشده در ارتباط با کربونیل ۴ ۱۰۱

سولفید (SCO) درست‌اند.



به جز عبارت آخر سایر عبارت‌ها درست هستند. ۳ ۱۰۲

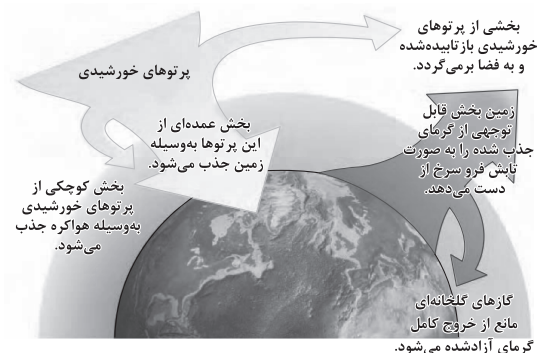
یکی از عواملی که می‌تواند تقارن و توزیع یکنواخت بارهای الکتریکی را در مولکول‌های چنداتی به هم بزند، وجود جفت الکترون‌های ناپیوندی روی اتم مرکزی است.



۱۱۱ ۳ به جز عبارت سوم سایر عبارتها درست هستند.

در ۱۵۰ سال گذشته میانگین جهانی سطح آبهای آزاد در حدود ۲۰۰mm افزایش یافته است.

۱۱۲ ۴ شکل زیر رفتار زمین در برابر پرتوهای خورشیدی را نشان می‌دهد.



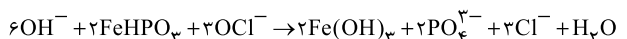
۱۱۳ ۳ به جز عبارت نخست، سایر عبارتها درست هستند. برای نام‌گذاری MgO (منیزیم اکسید) همانند ZnO (روی اکسید) از اعداد رومی استفاده نمی‌شود.

۱۱۴ ۳ به جز عبارت دوم، سایر عبارتها درست هستند.

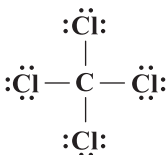
#### بررسی عبارتها:

- برای ترکیب‌های مورد نظر فرمول  $\text{SiO}_2$  و  $\text{CrBr}_3$  را می‌توان در نظر گرفت.
- آثار زیانبار باران اسیدی بر روی پوست، دستگاه تنفس و چشم‌ها به سرعت قابل تشخیص است.
- بدون شرح!
- چگالی گاز CO کم‌تر از هوا است، بنابراین یک گرم از این گاز در مقایسه با یک گرم هوا، حجم بیشتری اشغال می‌کند.

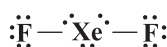
۱۱۵ ۲ معادله موازنه‌شده واکنش مورد نظر به صورت زیر است:



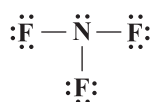
۱۱۶ ۲ در زیر ساختار هر مولکول و نسبت مورد نظر آورده شده است:



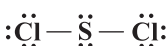
$$\left(\frac{12}{4} = 3\right)$$



$$\left(\frac{9}{4} = 4/5\right)$$



$$\left(\frac{10}{4} = 3/33\right)$$

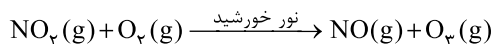


$$\left(\frac{16}{4} = 4\right)$$

۱۱۷ ۳ به جز عبارت سوم سایر عبارتها درست هستند.

#### بررسی عبارتها:

- جایی که رعد و برق ایجاد می‌شود، دما به اندازه‌ای بالا است که ابتدا NO و سپس  $\text{NO}_2$  تشکیل می‌شود.
- اوزون تروپوسفری مطابق معادله زیر تشکیل می‌شود:



۱۰۳ ۴ یون پایدار سولفید  $\text{S}^{2-}$  است.

$$\frac{2}{r_{\text{S}^{2-}}} = 1/08 \times 10^{-2} \frac{e}{\text{pm}} \Rightarrow r_{\text{S}^{2-}} = 185 \text{pm} \equiv 0/185 \text{nm}$$

۱۰۴ ۴ تمامی موارد بر روی شکل، درست مشخص شده‌اند.

۱۰۵ ۲ • در NaF عدد کوئوردیناسیون کاتیون و آنیون به ترتیب ۶ و ۶ است.

• در  $\text{MgF}_2$  عدد کوئوردیناسیون کاتیون و آنیون به ترتیب ۶ و ۳ است.

• در  $\text{ScF}_3$  عدد کوئوردیناسیون کاتیون و آنیون به ترتیب ۶ و ۲ است.

#### ۱۰۶ ۳ بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) هر دو مولکول  $\text{NCl}_3$  و  $\text{O}_3$  در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند.

(۲) گشتاور دوقطبی مولکول‌ها نمی‌تواند کوچک‌تر از صفر باشد.

(۴) در مولکول‌های قطبی مانند CO به اتمی که تراکم بار الکتریکی روی آن بیشتر است، بار جزئی منفی ( $\delta^-$ ) نسبت می‌دهند.

۱۰۷ ۲ عبارتهای اول و دوم درست هستند.

#### بررسی عبارتهاک نادرست:

• در ساختار ترکیب‌های یونی با یون‌های چنداتی، پیوند کووالانسی (اشتراکی) نیز وجود دارد.

• هر ترکیب یونی دوتایی را می‌توان فرآورده واکنش یک فلز با یک نافلز دانست.

۱۰۸ ۴ نسبت عدد کوئوردیناسیون آنیون به عدد کوئوردیناسیون کاتیون برابر با نسبت شمار کاتیون‌ها به شمار آنیون‌های ترکیب یونی است.

$$\text{MgO}: \frac{\text{عدد کوئوردیناسیون آنیون}}{\text{عدد کوئوردیناسیون کاتیون}} = \frac{1(\text{Mg}^{2+})}{1(\text{O}^{2-})} = 1$$

$$\text{CaF}_2: \frac{\text{عدد کوئوردیناسیون آنیون}}{\text{عدد کوئوردیناسیون کاتیون}} = \frac{1(\text{Ca}^{2+})}{2(\text{F}^-)} = 0/5$$

#### ۱۰۹ ۴ بررسی ویژگی‌ها:

• کلروفرم برخلاف متان گازی شکل، در دمای اتاق به حالت مایع بوده و از این‌رو نقطه جوش آن بالاتر از متان است.

• کلروفرم ( $\text{CHCl}_3$ ) برخلاف متان از مولکول‌های قطبی تشکیل شده و گشتاور دوقطبی آن بیشتر از متان است.

• کلروفرم به دلیل قطبیت، در مقایسه با متان به مقدار بیشتری در آب حل می‌شود.

• عدد اکسایش C در کلروفرم ( $\text{CHCl}_3$ ) و متان ( $\text{CH}_4$ ) به ترتیب ۲ و -۴ است.

• تفاوت میان شمار جفت الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی در کلروفرم و متان به ترتیب برابر با ۵ و ۴ است.



۱۱۰ ۱ • نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی گونه  $\text{NO}_2^-$  مشابه شکل a است که در آن اتم مرکزی در مقایسه با اتم‌های کناری بزرگ‌تر بوده و خاصیت نافلزی آن کم‌تر است.

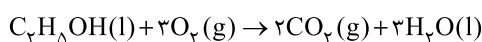
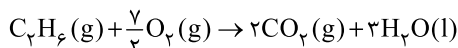
• نقشه پتانسیل الکتروستاتیکی گونه‌های  $\text{PH}_3$  و  $\text{CH}_3^-$  مشابه شکل b است که در آن اتم مرکزی در مقایسه با اتم‌های کناری بزرگ‌تر بوده و خاصیت نافلزی آن بیشتر است.



۱۲۳ ۲ عبارت‌های اول، دوم و آخر درست هستند.

### بررسی عبارت‌ها:

- نمودار داده شده مربوط به یک واکنش گرماگیر بوده و مانند واکنش فتوسنتز، در واکنش‌های گرماگیر ( $\Delta H > 0$ )، سامانه مقداری انرژی به دست می‌آورد.
  - محتوای انرژی با پایداری رابطه عکس دارد. بنابراین هر چند محتوای انرژی از  $N_2O_4$  از  $NO_2$  کم‌تر است، اما پایداری آن بیشتر می‌باشد.
  - گازهای  $N_2O_4$  و  $NO_2$  به ترتیب بی‌رنگ و قهوه‌ای رنگ هستند.
- ۱۲۴ ۴ هر چهار عبارت پیشنهاد شده درست هستند.



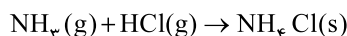
### بررسی عبارت‌ها:

- به معادله واکنش‌های سوختن کامل اتان و اتانول نگاه کنید.
- آنتالپی سوختن آلکان، منفی‌تر از آنتالپی سوختن الکل هم کربن آن است.
- ارزش سوختی آلکان، بیشتر از ارزش سوختی الکل هم‌کربن آن است.
- اتانول سوخت سبز محسوب می‌شود و جرم  $CO_2$  حاصل از سوختن یک گرم از آن، کم‌تر از سوختن یک گرم اتان است.

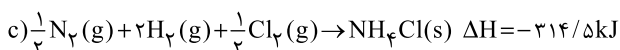
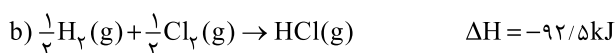
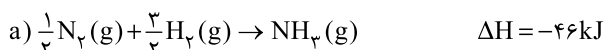
۱۲۵ ۲ فرمول مولکولی هر کدام از ساختارهای c و d به صورت  $C_9H_{14}O_2$  است.

- فرمول مولکولی ساختار a به صورت  $C_8H_{14}O_2$  است.
- فرمول مولکولی ساختار b به صورت  $C_9H_{16}O_2$  است.

۱۲۶ ۱ معادله واکنش هدف به صورت زیر است:



معادله واکنش‌های کمکی نیز در زیر آمده‌اند:



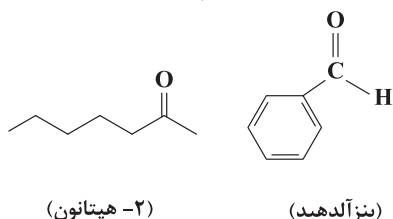
اگر هر کدام از واکنش‌های a و b را وارونه کرده و با واکنش c جمع کنیم به واکنش هدف می‌رسیم:

$$\Delta H(\text{هدف}) = -\Delta H_a - \Delta H_b + \Delta H_c = (46) + (92/5) + (-314/5) = -176 \text{ kJ}$$

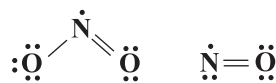
۱۲۷ ۴ هر چهار عبارت پیشنهاد شده در ارتباط با

بنزآلدهید ( $C_7H_6O$ ) و ۲-هپتانول ( $C_7H_{14}O$ ) درست هستند.

- از آن‌جا که شمار اتم‌های کربن مولکول آن‌ها با هم برابر است، از سوختن کامل هر مول از آن‌ها با فرض بازده ۱۰۰٪، ۷۰ مول گاز  $CO_2$  تولید می‌شود.



- از آن‌جا که گاز  $NO_2$  قهوه‌ای رنگ است، هوای آلوده کلان‌شهرها اغلب به رنگ قهوه‌ای روشن دیده می‌شود.
- ساختار لوویس این اکسیدها به صورت زیر است:



۱۱۸ ۱ فقط عبارت آخر درست است.

### بررسی عبارت‌ها نادرست:

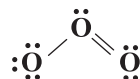
- گاز  $SO_2$  از دهانه آتشفشان‌های فعال نیز قابل جمع‌آوری است.
- در ساختار پلاستیک‌های سبز، علاوه بر کربن و هیدروژن عنصر اکسیژن نیز وجود دارد.
- هنگامی که به شکر گرما داده می‌شود، دچار تغییر شیمیایی شده و رنگ آن تغییر می‌کند.

۱۱۹ ۱ تمام موارد پیشنهاد شده در راستای توسعه پایدار بوده و جزو اهداف شیمی سبز است. منظور از فراوان‌ترین عنصر جهان، هیدروژن است. در ضمن فراوان‌ترین ترکیب موجود در هوای پاک و خشک لایه تروپوسفر، گاز  $CO_2$  است.

۱۲۰ ۲ به جز عبارت آخر سایر عبارت‌ها درست هستند.

### بررسی عبارت‌ها:

- با توجه به نقطه جوش اوزون ( $-112^\circ C$ ) و نقطه جوش اکسیژن ( $-183^\circ C$ )، در دمای  $-16^\circ C$ ، اوزون به حالت مایع و اکسیژن، گازی شکل است.
- در ساختار لوویس اوزون، ۶ جفت الکترون ناپیوندی و ۶ الکترون پیوندی وجود دارد:



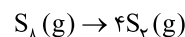
- اوزون تروپوسفری در حضور نور خورشید تشکیل می‌شود.
- مقدار اوزون در تمام بخش‌های هواکره ناچیز است.

۱۲۱ ۱ فقط عبارت آخر درست است.

### بررسی عبارت‌ها نادرست:

- ارزش سوختی یک گرم چربی بیشتر از مجموع ارزش سوختی یک گرم کربوهیدرات و یک گرم پروتئین است.
- گرافیت از الماس پایدارتر بوده و مقدار عددی  $\Delta H$  سوختن آن، کم‌تر از سوختن الماس است. اگر مقادیر یکسانی گرما از سوختن نمونه‌های مختلف از گرافیت و الماس آزاد شود، معنی آن این است که جرم گرافیت بیشتر بوده است.
- مقدار گرمای حاصل از واکنش سوختن ۲ مول اتانول، دو برابر واکنش سوختن یک مول اتانول است، اما در مورد  $\Delta H$  این گونه نیست.

۱۲۲ ۳



$$\Delta H(\text{واکنش}) = \left[ \text{مجموع آنتالپی پیوندهای واکنش دهنده‌ها} \right] - \left[ \text{مجموع آنتالپی پیوندهای واکنش پذیرنده‌ها} \right]$$

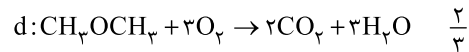
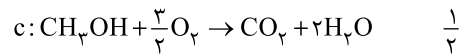
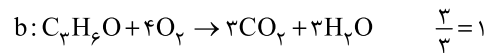
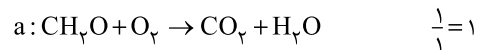
$$\Rightarrow +100 = 8(\Delta H(S-S)) - 4(\Delta H(S=S))$$

$$\Rightarrow +100 = 8(\Delta H(S-S)) - 4(425)$$

$$\Rightarrow \Delta H(S-S) = 225 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$



۱۲۸ | ۲ معادله موازنه شده هر چهار واکنش و نسبت مولی  $\text{CO}_2$  به  $\text{H}_2\text{O}$  در زیر آمده است:

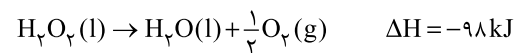


۱۲۹ | ۲ عبارتهای اول و چهارم درست هستند.

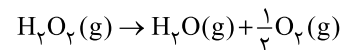
### بررسی عبارتهای نادرست:

- کربوهیدراتها در بدن به گلوکز شکسته شده و گلوکز حاصل در خون حل می شود.
- برای تعیین  $\Delta H$  واکنش سوختن مواد مایع نمی توان از گرماسنج لیوانی استفاده کرد.

۱۳۰ | ۱ مطابق داده های سؤال می توان نوشت:



با در نظر گرفتن آنتالپی تبخیر  $\text{H}_2\text{O}$  و  $\text{H}_2\text{O}_2$  و با توجه به این که سطح انرژی مواد به حالت بخار بالاتر از مواد مایع است، خواهیم داشت:



$$\Delta H = (44 - 47/5) - 98 = -101/5 \text{ kJ}$$

$$\Delta H(\text{واکنش}) = \left[ \begin{array}{l} \text{مجموع آنتالپی پیوندهای} \\ \text{واکنش دهنده ها} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{مجموع آنتالپی} \\ \text{پیوندهای فرآورده ها} \end{array} \right]$$

$$-101/5 \text{ kJ} = [2\Delta H(\text{O}-\text{H}) + \Delta H(\text{O}=\text{O})]$$

$$-[2\Delta H(\text{O}-\text{H}) + \frac{1}{2}\Delta H(\text{O}=\text{O})]$$

$$\Rightarrow -101/5 = (\Delta H(\text{O}-\text{O})) - (\frac{1}{2}(495))$$

$$\Rightarrow \Delta H(\text{O}-\text{O}) = 146 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$